Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 1[1]

Exercice 1

> À partir d'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on peut construire une fonction $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
>
> $$\begin{array}{ccc} (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \xmapsto{\widetilde{f}} & (\mathrm{Re}\,(f(x+\mathrm{i}y)), \mathrm{Im}\,(f(x+\mathrm{i}y))) \in \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} & \xmapsto{f} & f(z) = f(x+\mathrm{i}y) \in \mathbb{C} \end{array}$$
>
> La continuité de f équivaut à la continuité de $\widetilde{f}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{C}$, car elle est composée des fonctions Re, Im et de fonctions puissances, qui sont continues sur $\mathbb{C}$.

> **Rappel**
> Soit f une fonction de la variable complexe. On note
>
> $$\widetilde{f} : (x,y) \longmapsto (\mathrm{Re}\,(f(x+\mathrm{i}y)), \mathrm{Im}\,(f(x+\mathrm{i}y)) = (\mathrm{P}(x,y), \mathrm{Q}(x,y))$$
>
> Alors f est holomorphe, si et seulement si
> 1. $\widetilde{f}$ est différentiable
> 2. <u>et</u> $\widetilde{f}$ vérifie les *Conditions de Cauchy*
>
> $$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}$$
> $$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$

Notons P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f. Alors

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 3y^2 \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = 0$$

On en déduit que les relations de Cauchy ne sont vérifiées que le long de la parabole d'équation

$$2x = 3y^2$$

[1] généré avec LaTeX 2_ε. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.univ-lyon.fr`

Soit z un point de cette parabole. Alors il existe y_0 tel que $z = \dfrac{3y_0^2}{2} + \mathrm{i}y_0$, et si f est holomorphe, alors

$$f'(z) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = 3y_0^2$$

Étudions le reste entre $f(z+h)$, et $f(z) + f'(z)h$, en notant h_1 et h_2 la partie réelle et la partie imaginaire de h.

$$\begin{aligned}
f(z+h) - f(z) - f'(z)h &= \left(\frac{3y_0^2}{2} + h_1\right)^2 + \mathrm{i}\,(y_0 + h_2)^3 - \frac{9y_0^4}{4} - \mathrm{i}y_0^3 - 3y_0^2(h_1 + \mathrm{i}h_2) \\
&= \frac{9y_0^4}{4} + 3y_0^2h_1 + h_1^2 + \mathrm{i}\left(y_0^3 + 3y_0h_2^2 + 3y_0^2h_2 + h_2^3\right) \\
&\quad - \frac{9y_0^4}{4} - \mathrm{i}y_0^3 - 3y_0^2(h_1 + \mathrm{i}h_2) \\
&= h_1^2 + \mathrm{i}\left(3y_0h_2^2 + h_2^3\right) \\
f(z+h) - f(z) - f'(z)h &= |h|\ \frac{h_1^2 + \mathrm{i}\left(3y_0h_2^2 + h_2^3\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}
\end{aligned}$$

En écrivant h sous forme trigonométrique, on obtient

$$f(z+h) - f(z) - f'(z)h = |h|\ \left(r\cos^2\theta + \mathrm{i}\left(3y_0r\sin^2\theta + r^2\sin^3\theta\right)\right)$$

et on a

$$\lim_{r\to 0}\left(r\cos^2\theta + \mathrm{i}\left(3y_0r\sin^2\theta + r^2\sin^3\theta\right)\right) = 0$$

d'où
$$f(z+h) - f(z) - f'(z)h = \mathrm{O}\left(|h|\right)$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est holomorphe le long de la parabole d'équation } 2x = 3y^2.}$$

> **Rappel**
> La dérivée de f, aux points où elle est holomorphe, est égale à
>
> $$f'(z) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$
>
> On peut en trouver d'autres expressions, à l'aide des formules de Cauchy.
> Dans notre cas, on a, aux points où f est holomorphe
>
> $$f'(z) = 3\left(\mathrm{Im}\,(z)\right)^2$$

Exercice 2

Notons P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} &= 0 & \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} &= 0 & \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que si f est différentiable en 0, alors $f'(0) = 0$. Afin d'étudier la différentiabilité de f, on forme la différence $f(0+h) - f(0) = f(h)$

$$\frac{f(h)}{|h|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

En utilisant la forme exponentielle de $h = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on obtient

$$\frac{f(h)}{|h|} = \sqrt{|\sin\theta\cos\theta|}$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque r tend vers 0. On en déduit que f n'est pas différentiable en 0.

Exercice 3

Notons $\widetilde{f}$ la fonction

$$(x,y) \longmapsto (\mathrm{Re}\,(f(x+\mathrm{i}y)), \mathrm{Im}\,(f(x+\mathrm{i}y))) = (\mathrm{P}(x,y), \mathrm{Q}(x,y))$$

Comme la fonction f est holomorphe, elle vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = -\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} \end{cases}$$

> **Méthode de calcul du Jacobien d'un changement de variable**
> Soit ϕ le changement de variable $(x_1, \dots x_n) \mapsto (y_1, \dots y_n)$. Si on connaît les fonctions y_i, on peut calculer facilement les dérivées partielles $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, donc la matrice jacobienne du changement de variable. Pour calculer les dérivées partielles inverses, $\dfrac{\partial x_j}{\partial y_j}$, ce qui revient à calculer la matrice jacobienne de ϕ^{-1}, il suffit d'utiliser la formule
>
> $$\Big(\mathrm{Jac}(\phi^{-1})\Big) = \Big(\mathrm{Jac}(\phi)\Big)^{-1}$$

Or on a

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta}$$

En coordonnées polaires, on a $x = r\cos\theta$, et $y = r\sin\theta$, donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{cases}$$

En inversant cette relation, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta & \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

Les relations de Cauchy, exprimées en coordonnées polaires sont donc

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} &= \sin\theta\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \theta} \\ \sin\theta\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} &= -\cos\theta\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \theta} \end{aligned}}$$

On multiplie la première équation par $\cos\theta$, et la seconde par $\sin\theta$, et en additionnant, on obtient

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \theta}$$

On multiplie la première équation par $-\sin\theta$, et la seconde par $\cos\theta$, et en additionnant, on obtient

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial r}$$

Les conditions de Cauchy peuvent donc aussi s'écrire sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial r} \end{aligned}}$$

Si $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} = 0$, alors Q ne dépend pas de r. La première relation devient alors

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}\theta}$$

d'où
$$\mathrm{P}(r,\theta) = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}\theta}\,\log r + \mathrm{K_P}$$

où $\mathrm{K_P}$ est une constante. Comme $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} = 0$, la fonction $\dfrac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}\theta}$ ne dépend pas de θ. Finalement

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{K}\ln r + \mathrm{K_P} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{K}, \text{ où K et } \mathrm{K_P} \text{ sont des constantes réelles.}}$$

Aparté : Calcul des jacobiennes du changement de variables sphériques

En coordonnées sphériques, on a les relations suivantes

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r\cos\theta\cos\varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r\sin\theta\sin\varphi \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta\sin\varphi & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta\sin\varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r\sin\theta\cos\varphi \\
\frac{\partial z}{\partial r} &= \cos\theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r\sin\theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que la jacobienne du changement de variable $\phi : (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ est égale à

$$\mathrm{Jac}(\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Afin de calculer les dérivées de (r,θ,φ) par rapport à (x,y,z), il suffit d'inverser $\mathrm{Jac}(\phi)$. Pour cela, on commence par calculer le déterminant de la matrice jacobienne, en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
\det\Big(\mathrm{Jac}(\phi)\Big) &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

Pour inverser $\mathrm{Jac}(\phi)$, il reste à calculer la matrice de ses cofacteurs. On note $\mathrm{C}_{i,j}$ les cofacteurs. Alors

$$\mathrm{C}_{1,1} = \begin{vmatrix} r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$\mathrm{C}_{1,2} = -\begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$$

$$\mathrm{C}_{1,3} = \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r\sin\varphi$$

$$\mathrm{C}_{2,1} = -\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$\mathrm{C}_{2,2} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$$

$$\mathrm{C}_{2,3} = -\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r\cos\varphi$$

$$\mathrm{C}_{3,1} = \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\mathrm{C}_{3,2} = -\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = -r\sin^2\theta$$

$$\mathrm{C}_{3,3} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

En transposant la matrice des cofacteurs, et en divisant par le déterminant, on obtient

$$\Big(\mathrm{Jac}(\phi)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit les dérivées partielles suivantes

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi & \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi & \dfrac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{array}$$

Exercice 4

On remarque que pour tout z, $f(z) = z^2$. On en déduit que f est indéfiniment dérivable, avec

$$\boxed{f'(z) = 2z \qquad f''(z) = 2 \qquad \forall n \geqslant 2 \quad f^{(n)}(z) = 0}$$

Exercice 5

On étudie la limite de f au point i de la limite

$$f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - \mathrm{i}}$$

Commençons par évaluer le numérateur au point i

$$3\mathrm{i}^4 - 2\mathrm{i}^3 + 8\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i} + 5 = 3 + 2\mathrm{i} - 8 - 2\mathrm{i} + 5 = 0$$

Étudier la limite de f revient donc à étudier la dérivabilité de la fonction

$$g\ :\ z \longmapsto 3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5$$

au point i. Cette fonction est une fonction polynôme, elle est donc dérivable en tout point de $\mathbb{C}$, avec

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad g'(z) = 12z^3 - 6z^2 + 16z - 2$$

En particulier, on a $g'(\mathrm{i}) = 12\mathrm{i}^3 - 6\mathrm{i}^2 + 16\mathrm{i} - 2 = 4 + 4\mathrm{i}$

$$\boxed{f \text{ admet une limite en i, qui est égale à } 4 + 4\mathrm{i}.}$$

Exercice 6

> **Rappel : Intégrale le long d'un chemin**
> Soit γ un chemin défini sur un segment $[\,a\,;b\,]$, et une fonction de variable complexe continue sur $\gamma([\,a\,;b\,])$. L'intégrale de f le long du chemin γ est défini par
> $$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Afin de calculer l'intégrale de f le long du carré, nous allons calculer l'intégrale le long de chacun des segments

- **Intégrale le long de** [OA] Paramétrons le segment [OA] par $\varphi\,:\,t \in [\,0\,;1\,] \mapsto t$. On a alors $\varphi'(t) = 1$. On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_{[\mathrm{OA}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$
- **Intégrale le long de** [AB] Paramétrons le segment [AB] par $\varphi\,:\,t \in [\,0\,;1\,] \mapsto 1 + \mathrm{i}t$. On a alors $\varphi'(t) = \mathrm{i}$. On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_{[\mathrm{AB}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= \int_0^1 (1+t^2)\ \mathrm{i}\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{i}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1\\ \int_{[\mathrm{AB}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= \frac{4\mathrm{i}}{3}\end{aligned}$$
- **Intégrale le long de** [BC] Paramétrons le segment [BC] par $\varphi\,:\,t \in [\,0\,;1\,] \mapsto 1 - t + \mathrm{i}$. On a alors $\varphi'(t) = -1$. On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_{[\mathrm{BC}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= -\int_0^1 ((1-t)^2 + 1)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{(1-t)^3}{3} - t\right]_0^1\\ &= -1 - \frac{1}{3}\\ \int_{[\mathrm{BC}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$
- **Intégrale le long de** [CO] Paramétrons le segment [CO] par $\varphi\,:\,t \in [\,0\,;1\,] \mapsto \mathrm{i} - \mathrm{i}t$. On a alors $\varphi'(t) = -\mathrm{i}$. On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_{[\mathrm{CO}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= \int_0^1 (1-t)^2\ (-\mathrm{i})\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{i}\left[\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1\\ \int_{[\mathrm{CO}]} |z|^2\ \mathrm{d}z &= -\frac{\mathrm{i}}{3}\end{aligned}$$

En additionnant les différentes intégrales, on obtient

$$\boxed{\int_{\mathrm{C}} |z|^2 \, \mathrm{d}z = \mathrm{i} - 1}$$

Exercice 7

Paramétrons le segment [AB], où A a pour affixe i, et B a pour affixe $2 - \mathrm{i}$ par

$$\gamma \,:\, t \in [\,0\,;1\,] \longmapsto \mathrm{i} + t(2 - 2\mathrm{i})$$

On a alors $\gamma'(t) = 2 - 2\mathrm{i}$, et

$$\begin{aligned}
\int_{[\mathrm{AB}]} (3xy + \mathrm{i}y^2)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \big(6t(1-2t) + \mathrm{i}(1-2t)^2\big)\,(2-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}t \\
&= (2-2\mathrm{i})\int_0^1 \big(6t - 12t^2 + \mathrm{i}(1 - 4t + 4t^2)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= (2-2\mathrm{i})\left[3t^2 - 4t^3 + \mathrm{i}(t - 2t^2 + \frac{4t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= (2-2\mathrm{i})\left(-1 + \frac{\mathrm{i}}{3}\right) \\
\int_{[\mathrm{AB}]} (3xy + \mathrm{i}y^2)\,\mathrm{d}z &= -\frac{4}{3} + \frac{8\mathrm{i}}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{[\mathrm{AB}]} (3xy + \mathrm{i}y^2)\,\mathrm{d}z = -\frac{4}{3} + \frac{8\mathrm{i}}{3}}$$