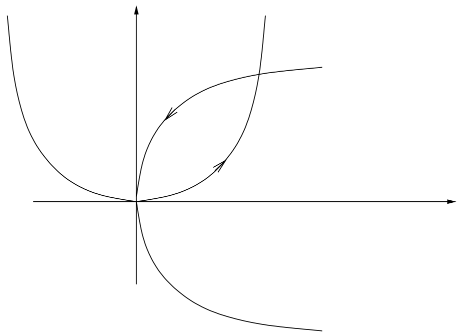
Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 1[1]

Exercice 1



On paramètre le morceau de parabole $y = x^2$ par

$$\gamma_1 \,:\, t \in [\,0\,;1\,] \longmapsto t + \mathrm{i}t^2$$

On a alors $\gamma_1'(t) = 1 + 2\mathrm{i}t$. On paramètre le morceau de parabole $y^2 = x$ par

$$\gamma_2 \,:\, t \in [\,0\,;1\,] \longmapsto t^2 + \mathrm{i}t$$

On a alors $\gamma_2'(t) = 2t+\mathrm{i}$. Lorsque t varie de 0 à 1, le chemin γ_2 est parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique. On ajoute donc un signe moins devant l'intégrale le long de γ_2.

$$\int_{\mathscr{P}} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z$$

Commençons par calculer l'intégrale le long du chemin γ_1.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \big(5(\gamma_1(t))^4 - (\gamma_1(t))^3 + 2\big)\,\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[(\gamma_1(t))^5 - \frac{(\gamma_1(t))^4}{4} + 2\gamma_1(t)\right]_0^1 \\
&= \left[(t+\mathrm{i}t^2)^5 - \frac{(t+\mathrm{i}t^2)^4}{4} + 2(t+\mathrm{i}t^2)\right]_0^1 \\
&= (1+\mathrm{i})^5 - \frac{(1+\mathrm{i})^4}{4} + 2(1+\mathrm{i})
\end{aligned}$$

Pour calculer les puissances de $1+\mathrm{i}$, on met ce nombre sous forme trigonométrique : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. On en déduit que

$$(1+\mathrm{i})^5 = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4} = -4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = -4(1+\mathrm{i}) = -4 - 4\mathrm{i}$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.univ-lyon1.fr`

et $$(1+\mathrm{i})^4 = 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/4} = -4$$

on en déduit que $$\int_{\gamma_1} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z = -1 - 2\mathrm{i}$$

Calculons à présent l'intégrale le long du chemin γ_2.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \big(5(\gamma_2(t))^4 - (\gamma_2(t))^3 + 2\big)\,\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[(\gamma_2(t))^5 - \frac{(\gamma_2(t))^4}{4} + 2\gamma_2(t)\right]_0^1 \\
&= \left[(t^2 + \mathrm{i}t)^5 - \frac{(t^2 + \mathrm{i}t)^4}{4} + 2(t^2 + \mathrm{i}t)\right]_0^1 \\
&= (1+\mathrm{i})^5 - \frac{(1+\mathrm{i})^4}{4} + 2(1+\mathrm{i}) \\
&= -1 - 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

d'après ce qu'on a fait pour l'intégrale le long du chemin γ_1. On trouve finalement

$$\boxed{\int_{\mathscr{P}} (5z^4 - z^3 + 2)\,\mathrm{d}z = 0}$$

> **Remarque**
> On a en fait le résultat plus général suivant : si f est une fonction holomorphe, alors son intégrale le long de tout chemin fermé est nulle.

Exercice 2

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $1+\mathrm{i}$ et de rayon 2 se paramètre par

$$\gamma \,:\, t \in [\,0\,;2\pi\,] \longmapsto 1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

On a alors $\gamma'(t) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^2}{-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\; 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\right) \\
\mathrm{I} &= 2\mathrm{i}\pi
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{I} = 2\mathrm{i}\pi}$$

Exercice 3

> **Rappel : règle de d'Alembert**
> Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Si u_{n+1}/u_n admet une limite ℓ quand $n \to \infty$, alors trois cas se présentent
> - Si $\ell > 1$, alors la série diverge grossièrement.
> - Si $\ell < 1$, alors la série est convergente.
> - Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.
>
> Concernant les séries entières, on a le corollaire suivante.
>
> **Règle de d'Alembert pour les séries entières**
> Soit $\sum u_n z^n$ une série entière. On suppose que pour tout entier n, $|u_n| \neq 0$. Si $|u_{n+1}/u_n|$ converge vers une limite ℓ non nulle, alors la série entière a pour rayon de convergence $1/\ell$. Si $|u_{n+1}/u_n|$ converge vers 0, alors la série entière a pour rayon ∞.

Formons le rapport de d'Alembert de la série u_n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}$$

et ce rapport a pour limite 1. On en déduit que la série entière a pour rayon $1/1 = 1$.

$$\boxed{\text{La série entière a pour rayon 1.}}$$

> **Rappel : Règle de Riemann pour la convergence des séries**
> Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$, alors la série converge.

On s'intéresse à la convergence de la série de terme général z^n/n^2. Son module est égal à $1/n^2$. De plus, on a

$$n^{3/2}\,\frac{1}{n^2} \to 0$$

D'après la règle de Riemann, la série converge absolument. On en déduit que si z est de module 1, alors la série est convergente. Afin d'écrire les parties réelle et imaginaire de la somme de la série sous forme de série trigonométrique, on utilise la forme exponentielle de z. On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta))}{n^2} \\
f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\cos(n\theta)}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\sin(n\theta)}{n^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que
$$\boxed{\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(f(z)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\cos(n\theta)}{n^2} \\
\mathrm{Im}\,(f(z)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\sin(n\theta)}{n^2}
\end{aligned}}$$

Exercice 4

Tout d'abord, $z \mapsto a\mathrm{e}^{z}$ est bien solution. Réciproquement, supposons qu'une fonction f vérifie

$$f'(z) = f(z)$$

En multipliant l'équation par $z \mapsto \mathrm{e}^{-z}$, on obtient

$$f'(z)\mathrm{e}^{-z} - f(z)\mathrm{e}^{-z} = 0$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(f(z)\mathrm{e}^{-z}\right) = 0$$

On en déduit que la fonction $z \mapsto f(z)\mathrm{e}^{-z}$ est constante, c'est à dire qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z)\mathrm{e}^{-z} = a$$

soit

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = a\mathrm{e}^{z}$$

Pour u fixé, la fonction $z \mapsto \exp(z+u)$ est la composée de la fonction $z \mapsto z+u$, et de la fonction exp. sa dérivée est égale à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\exp(z+u)\right) = \exp(z+u)$$

Cette fonction vérifie $y' = y$, donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \exp(z+u) = a \exp z$$

En évaluant l'expression en $z = 0$, on obtient $a = \mathrm{e}^{u}$, soit

$$\boxed{\forall z, u \qquad \exp(z+u) = \exp(z)\exp(u)}$$