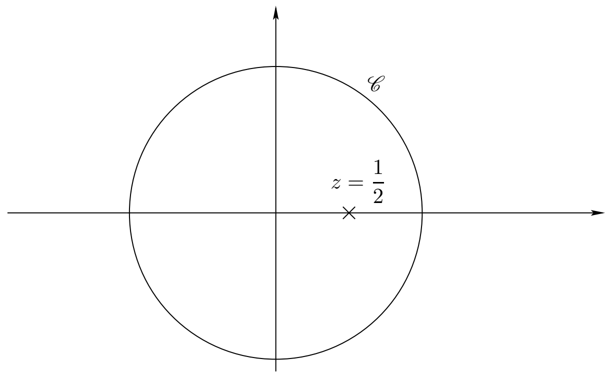
Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 3[1]

> **Rappel : Formules de Cauchy**
> Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω. Alors pour tout lacet γ entourant un point $z_0 \in \Omega$,
>
> $$f(z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z$$
>
> et $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z$$

Exercice 1



On cherche à calculer

$$\mathrm{I} = \int_{\mathscr{C}} \frac{\exp z}{2z - 1}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{C}} \frac{\exp z}{z - \dfrac{1}{2}}\, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{\exp z}{z - \dfrac{1}{2}}\, \mathrm{d}z$$

On reconnaît la formule de Cauchy pour la fonction $z \mapsto \exp(z)$. Le point $1/2$ appartient à l'intérieur du lacet formé par le cercle de centre 1 et de rayon 1. On en déduit que

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{\exp z}{z - \dfrac{1}{2}}\, \mathrm{d}z = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

soit $$\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{1/2}}$$

---

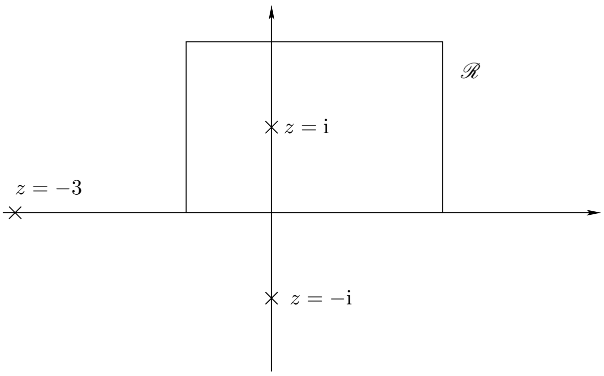
[1] généré avec LaTeX 2_ε. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.univ-lyon1.fr`

Exercice 2

On cherche à calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_{\mathscr{R}} \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+3)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}} \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+3)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}} \frac{\operatorname{sh} z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}\,\frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

On reconnaît la formule de Cauchy pour la fonction $f\,:\,z \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}$ sur le domaine suivant



On en déduit $\qquad \mathrm{I} = 2\mathrm{i}\pi\,\dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_{\mathscr{R}} \frac{\operatorname{sh} z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}\,\frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi f(\mathrm{i})$

Calculons à présent la valeur de f au point i

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{i}) &= \frac{\operatorname{sh}(\mathrm{i})}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)} \\
&= \frac{\operatorname{sh}(\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}\times 10}
\end{aligned}$$

de plus $\qquad \operatorname{sh}(\mathrm{i}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}}}{2} = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\sin 1$

soit $\qquad 2\mathrm{i}\pi f(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}\pi\,\dfrac{\mathrm{i}\sin 1(3-\mathrm{i})}{20\mathrm{i}} = \pi(1+3\mathrm{i})\dfrac{\sin 1}{10}$

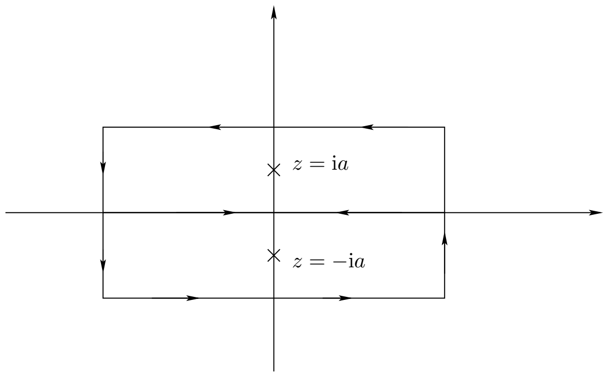
Finalement $\qquad \boxed{\mathrm{I} = \dfrac{\pi(1+3\mathrm{i})\sin 1}{10}}$

Exercice 3

On cherche à calculer l'intégrale sur le carré défini par $x = -2a$, $x = 2a$, $y = -2a$, $y = 2a$, de la fonction

$$z \longmapsto \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}$$

Le domaine, ainsi que les singularités de la fonction sont représentés sur le dessin suivant



On divise le domaine en deux rectangles, définis respectivement par

- $\mathscr{R}_1$, le rectangle défini par $x = -2a$, $x = 2a$, $y = 0$, $y = 2a$.
- $\mathscr{R}_2$, le rectangle défini par $x = -2a$, $x = 2a$, $y = -2a$, $y = 0$.

On a alors

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathscr{R}_1} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{R}_2} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z$$

car l'intégrale sur le segment $[-2a\,;2a]$ est comptée deux fois, mais avec des signes opposés. Calculons les deux intégrales trouvées à l'aide de la formule de Cauchy. D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{R}_1} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z &= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}_1} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}_1} \frac{a^2 - z^2}{(z + \mathrm{i}a)(z - \mathrm{i}a)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{i}\pi \left(\frac{a^2 - z^2}{(z + \mathrm{i}a)}\right)_{z = \mathrm{i}a} \\
\int_{\mathscr{R}_1} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z &= 2\pi a
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{R}_2} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z &= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}_2} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}_2} \frac{a^2 - z^2}{(z + \mathrm{i}a)(z - \mathrm{i}a)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{i}\pi \left(\frac{a^2 - z^2}{(z - \mathrm{i}a)}\right)_{z = -\mathrm{i}a} \\
\int_{\mathscr{R}_2} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z &= -2\pi a
\end{aligned}$$

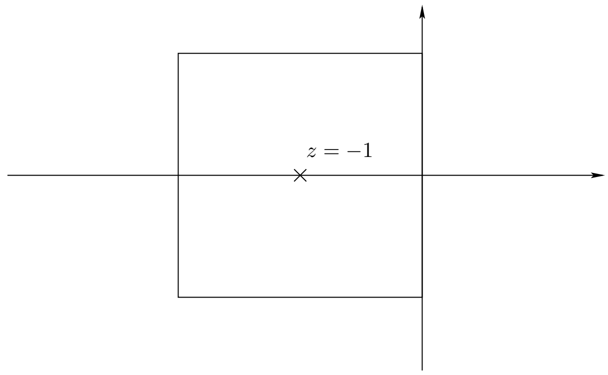
Finalement $$\boxed{\mathrm{I} = 0}$$

Exercice 4

On cherche à calculer l'intégrale

$$\int_{\mathscr{R}} \frac{z\exp(tz)}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

où l'ensemble $\mathscr{R}$ est représenté sur le dessin suivant



Posons $f : z \mapsto z\exp(tz)$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$f^{(2)}(-1) = \frac{2!}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{R}} \frac{z\exp(tz)}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z$$

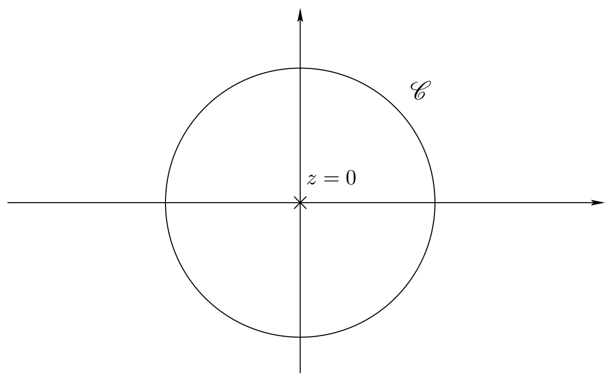
Calculons les deux premières dérivées de f

$$\begin{aligned} f'(z) &= (tz+1)\exp(tz) \\ f^{(2)}(z) &= (2t+zt^2)\exp(tz) \end{aligned}$$

d'où $$f^{(2)}(-1) = t(2-t)\exp(-t)$$

On en déduit que $$\boxed{\int_{\mathscr{R}} \frac{z\exp(tz)}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi t(2-t)\exp(-t)}$$

Exercice 5



Le point 0 est à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1. Posons $f : z \mapsto \exp(kz)$. D'après la formule de Cauchy

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{\exp(kz)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\, f(0) = 2\mathrm{i}\pi$$

Paramétrons l'intégrale calculée par $\theta \in [\,-\pi\,;\pi\,] \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$. On obtient alors l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(k\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{i}\pi$$

d'où
$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(k\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Par ailleurs
$$\begin{aligned}\exp\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\right) &= \exp\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)\\ &= \exp\left(\cos\theta\right)\exp\left(\mathrm{i}\sin\theta\right)\\ &= \exp\left(\cos\theta\right)\left(\cos\left(\sin\theta\right) + \mathrm{i}\cos\left(\sin\theta\right)\right)\end{aligned}$$

Donc en prenant la partie réelle de l'égalité obtenue, il vient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(k\cos\theta\right)\cos\left(k\sin\theta\right)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Enfin, la fonction $\theta \mapsto \exp\left(k\cos\theta\right)\cos\left(k\sin\theta\right)$ est paire, donc son intégrale sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ est égale à deux fois son intégrale sur $[\,0\,;\pi\,]$. On obtient donc finalement

$$\boxed{\int_{0}^{\pi} \exp\left(k\cos\theta\right)\cos\left(k\sin\theta\right)\,\mathrm{d}\theta = \pi}$$

Exercice 6

On cherche à déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto (z-3)\sin\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$, au voisinage du point -2. Pour cela, on détermine le développement de chacun des facteurs, puis on effectue le produit. On a

$$\begin{aligned} z - 3 &= z + 2 - 5\\ \sin\left(\frac{1}{z+2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z+2)^{2n+1}}\end{aligned}$$

En effectuant le produit, on obtient

$$\boxed{(z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z+2)^{2n}} - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z+2)^{2n+1}}}$$