Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 4[1]

> **Rappel : formule des Résidus**
> Soit F une fonction méromorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et soit γ un lacet de Ω. Alors
> $$\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}(\mathrm{F}, z_0)$$

Exercice 1

On cherche à calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}(a) = \int_0^\pi \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{a^2 + \sin^2\theta}$$

Si on change a en $-a$, on change le signe du résultat. On peut donc supposer que $a > 0$, les intégrales pour $a < 0$ s'en déduiront en changeant le signe.

> **Rappel : intégrales en $\cos\theta$ et $\sin\theta$**
> Pour calculer une intégrale de la forme
> $$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$
> il suffit de poser $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et on se ramène alors à une intégrale sur le cercle unité d'une fonction de la variable complexe. Le cosinus et le sinus sont transformés à l'aide des formules d'Euler
> $$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$
> $$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$$
> L'intégrale que l'on cherche à calculer est donc égale à l'intégrale le long du cercle unité de la fonction
> $$z \longmapsto \frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{F}\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.univ-lyon1.fr`

Comme la fonction $\theta \mapsto \dfrac{a}{a^2+\sin^2\theta}$ est paire, on a

$$\int_0^{\pi} \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta}$$

Posons $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On a alors

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2+\sin^2\theta} &= \frac{a}{a^2+\left(\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)^2}\\ &= \frac{a}{a^2-\dfrac{(z^2-1)^2}{4z^2}}\\ &= \frac{-4az^2}{(z^2-1)^2-4a^2z^2}\\ \frac{a}{a^2+\sin^2\theta} &= \frac{-4az^2}{(z^2-2az-1)(z^2+2az-1)}\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{C}$ le cercle unité. On obtient ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \int_{\mathscr{C}} \frac{4\mathrm{i}az}{(z^2-2az-1)(z^2+2az-1)}\,\mathrm{d}z$$

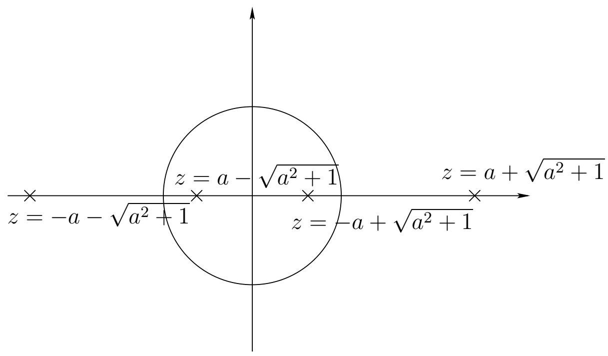
Les singularités de la fonction sont racines des polynômes

$$z^2-2az-1 \qquad \text{et} \qquad z^2+2az-1$$

Déterminons ces racines.

- $z^2-2az-1$
  Les racines de ce polynôme sont $a\pm\sqrt{a^2+1}$
- $z^2+2az-1$
  Les racines de ce polynôme sont $-a\pm\sqrt{a^2+1}$

Comme on a supposé que $a > 0$, seules deux racines sont dans le cercle unité : $a-\sqrt{a^2+1}$ et $-a+\sqrt{a^2+1}$.



L'application de la formule des résidus donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}} \frac{4\mathrm{i}az}{(z^2-2az-1)(z^2+2az-1)}\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\big(&\mathrm{Res}(\mathrm{F}, a-\sqrt{a^2+1})\\ &+\mathrm{Res}(\mathrm{F}, -a+\sqrt{a^2+1})\big)\end{aligned}$$

Il reste à calculer les résidus de F en $a - \sqrt{a^2+1}$ et $-a + \sqrt{a^2+1}$.

> **Rappel : calcul du résidu pour un pôle simple**
> Soit F une fonction de la variable complexe, et soit α un pôle de F, d'ordre 1. Alors
> $$\mathrm{Res}(\mathrm{F}, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z-\alpha)\mathrm{F}(z)$$

La fonction F, une fois factorisée, s'écrit

$$\mathrm{F} : z \longmapsto \frac{4\mathrm{i}az}{(z - a - \sqrt{a^2+1})(z - a + \sqrt{a^2+1})(z + a - \sqrt{a^2+1})(z + a + \sqrt{a^2+1})}$$

On obtient alors immédiatement

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\mathrm{F}, a - \sqrt{a^2+1}) &= -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{a^2+1}}\\ \mathrm{Res}(\mathrm{F}, -a + \sqrt{a^2+1}) &= -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

d'où
$$\int_{\mathscr{C}} \frac{4\mathrm{i}az}{(z^2 - 2az - 1)(z^2 + 2az - 1)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$

Comme on l'a expliqué au début de l'exercice, l'intégrale est du même signe que a. De plus, pour se ramener à l'intégrale sur $[-\pi\,;\pi]$, on divise le résultat par 2. On obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{I}(a) = \frac{\pi\,\mathrm{signe}(a)}{\sqrt{a^2+1}}}$$

Exercice 2

On cherche à calculer $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}$$

Commençons par transformer l'intégrande, en posant $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\sin^2\theta)^2} &= \frac{1}{\left(1+\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{(z^2-1)^2}{4z^2}\right)^2} \\
&= \frac{16z^4}{\left((z^2-1)^2-4z^2\right)^2} \\
\frac{1}{(1+\sin^2\theta)^2} &= \frac{16z^4}{(z^2-2z-1)^2(z^2+2z-1)^2}
\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{C}$ le cercle unité. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin^2\theta)^2} &= \int_{\mathscr{C}} \frac{16z^4}{(z^2-2z-1)^2(z^2+2z-1)^2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\
&= \int_{\mathscr{C}} \frac{16z^3}{\mathrm{i}(z^2-2z-1)^2(z^2+2z-1)^2}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Nous allons calculer cette intégrale par la formule des résidus. Pour cela, commençons par calculer les singularités de la fonction

$$\mathrm{F} \,:\, z \longmapsto \frac{16z^3}{\mathrm{i}(z^2-2z-1)^2(z^2+2z-1)^2}$$

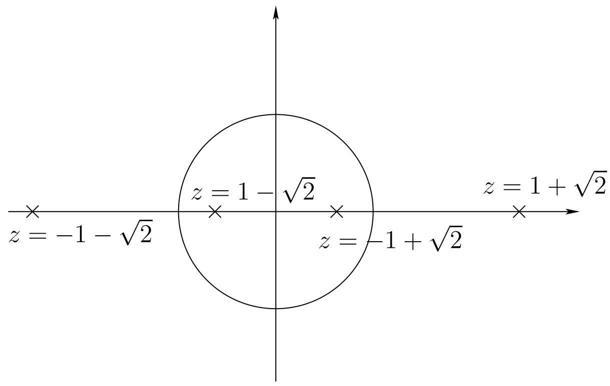
Ces singularités sont les zéros des polynômes z^2-2z-1 et z^2+2z-1.

- z^2-2z-1
  Les racines de ce polynôme sont $1\pm\sqrt{2}$
- z^2+2z-1
  Les racines de ce polynôme sont $-1\pm\sqrt{2}$

Les deux singularités de F qui se trouvent dans $\mathscr{C}$ sont $1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$. D'après la formule des résidus, on a donc

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{16z^3}{\mathrm{i}(z^2-2z-1)^2(z^2+2z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\left(\mathrm{Res}(\mathrm{F},-1+\sqrt{2})+\mathrm{Res}(\mathrm{F},1-\sqrt{2})\right)$$

Notons $\alpha = 1-\sqrt{2}$, et $\beta = 1+\sqrt{2}$. Les pôles sont alors $\pm\alpha$, et $\pm\beta$, et nous cherchons à calculer les résidus en $\pm\alpha$.



Calcul du résidu en α

Ce pôle est d'ordre 2. On en déduit que le développement en séries de Laurent au voisinage de α est de la forme

$$\mathrm{F}(z) = \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \widetilde{\mathrm{F}}(z)$$

où $\widetilde{\mathrm{F}}$ est une fonction holomorphe. Posons $h = z - \alpha$. On a alors

$$\mathrm{F}(\alpha+h) = \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-1}}{h} + \widetilde{\mathrm{F}}(\alpha+h)$$

d'où
$$\begin{aligned} h^2\mathrm{F}(\alpha+h) &= a_{-2} + a_{-1}h + h^2\widetilde{\mathrm{F}}(\alpha+h) \\ &= a_{-2} + a_{-1}h + \mathrm{O}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

Le résidu a_{-1} apparaît donc comme le deuxième terme du développement limité de $h \mapsto h^2\mathrm{F}(\alpha+h)$ au voisinage de 0. Commençons par arranger l'expression de $h^2\mathrm{F}(\alpha+h)$.

$$\begin{aligned} h^2\mathrm{F}(\alpha+h) &= \frac{(\alpha+h)^3}{(2\alpha+h)^2(\alpha-\beta+h)^2(\alpha+\beta+h)^2} \\ &= \frac{\alpha^3\left(1+\dfrac{h}{\alpha}\right)^3}{4\alpha^2\left(1+\dfrac{h}{2\alpha}\right)^2(\alpha-\beta)^2\left(1+\dfrac{h}{\alpha-\beta}\right)^2(\alpha+\beta)^2\left(1+\dfrac{h}{\alpha+\beta}\right)^2} \\ h^2\mathrm{F}(\alpha+h) &= \frac{\alpha^3}{4\alpha^2(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2}\;\frac{\left(1+\dfrac{h}{\alpha}\right)^3}{\left(1+\dfrac{h}{2\alpha}\right)^2\left(1+\dfrac{h}{\alpha-\beta}\right)^2\left(1+\dfrac{h}{\alpha+\beta}\right)^2} \end{aligned}$$

Il reste à calculer le développement limité de chacun des termes, et d'en effectuer le produit. Le développement limité du numérateur se calcule directement

$$\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^3 = 1 + \frac{3h}{\alpha} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

Les autres termes sont de la forme $\left(1+\dfrac{h}{\mathrm{A}}\right)^{-2}$:

$$\frac{1}{1+\dfrac{h}{\mathrm{A}}} = 1 - \frac{h}{\mathrm{A}} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

En élevant cette expression au carré, on obtient

$$\left(\frac{1}{1+\dfrac{h}{\mathrm{A}}}\right)^2 = 1 - \frac{2h}{\mathrm{A}} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

> **Remarque**
> D'une manière générale, pour développer un produit à l'ordre 1, on a
>
> $$\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(1+\mathrm{A}_i h + \mathrm{O}\left(h^2\right)\right) = 1 + \left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_i\right) h + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1+\dfrac{h}{\alpha}\right)^3}{\left(1+\dfrac{h}{2\alpha}\right)^2\left(1+\dfrac{h}{\alpha-\beta}\right)^2\left(1+\dfrac{h}{\alpha+\beta}\right)^2} \\
&= \left(1+\frac{3h}{\alpha}+\mathrm{O}\left(h^2\right)\right)\left(1-\frac{h}{\alpha}+\mathrm{O}\left(h^2\right)\right)\left(1-\frac{2h}{\alpha-\beta}+\mathrm{O}\left(h^2\right)\right) \\
&\qquad \times\left(1-\frac{2h}{\alpha+\beta}+\mathrm{O}\left(h^2\right)\right) \\
&= 1+\left(\frac{3}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{\alpha-\beta}-\frac{2}{\alpha+\beta}\right)h+\mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&= 1-\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+\mathrm{O}\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$h^2\mathrm{F}(\alpha+h) = \frac{\alpha^3}{4\alpha^2(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2}\left(1-\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+\mathrm{O}\left(h^2\right)\right)$$

d'où
$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\alpha) = -\frac{\alpha^2+\beta^2}{2(\alpha^2-\beta^2)^3}$$

En remplaçant avec les valeurs $\alpha = 1-\sqrt{2}$ et $\beta = 1+\sqrt{2}$, il vient

$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\alpha) = \frac{3}{16\times 8\sqrt{2}}$$

Comme la fonction F est paire, le résidu en α est égal à celui en $-\alpha$. On trouve donc finalement

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin^2\theta)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 3

On cherche à calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

Notons F la fonction $z \mapsto \dfrac{z^p}{1+z^n}$. Cette fonction a pour singularités les racines de z^n+1. Commençons par chercher ces racines. Comme 0 n'est pas racine, l'argument de z a un sens, et on a

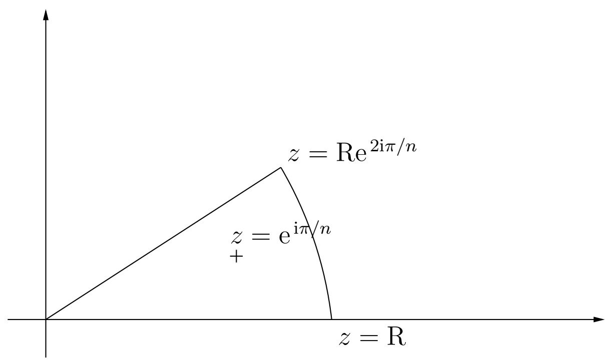
$$\begin{aligned}
z^n = -1 &\iff \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \mathrm{Arg}\,(z^n) = \mathrm{Arg}\,(-1) + 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^n = 1 \\ \mathrm{Arg}\,(z^n) = \pi + 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ n\,\mathrm{Arg}\,(z) = (2k+1)\pi \end{cases} \\
z^n = -1 &\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Arg}\,(z) = \dfrac{(2k+1)\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que le polynôme admet n racines distinctes, qui sont les complexes de la forme $\mathrm{e}^{(2k+1)\mathrm{i}\pi/n}$.

On intègre la fonction F le long du contour (noté $\mathcal{C}$) défini par

- le segment $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$,
- l'arc de cercle qui va du point d'affixe R au point d'affixe $\mathrm{Re}^{2\mathrm{i}\pi/n}$,
- le segment $\left[\,\mathrm{Re}^{2\mathrm{i}\pi/n}\,;0\,\right]$.

Ce contour est représenté graphiquement sur la figure suivante



Une seule singularité de F se trouve à l'intérieur du contour $\mathcal{C}$. La formule des résidus donne donc

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{F}(z)\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \mathrm{Res}(\mathrm{F}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})$$

On paramètre

- le segment $[0\,;\mathrm{R}]$ par $x \in [0\,;\mathrm{R}] \mapsto x$,
- l'arc de cercle qui va du point d'affixe R au point d'affixe $\mathrm{Re}^{2\mathrm{i}\pi/n}$, par $\theta \in \left[0\,;\dfrac{2\pi}{n}\right] \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,
- le segment $\left[\mathrm{Re}^{2\mathrm{i}\pi/n}\,;0\right]$ par $x \in [0\,;\mathrm{R}] \mapsto x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

On obtient ainsi l'égalité

$$\int_0^{\mathrm{R}} \frac{x^p}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi/n} \frac{\mathrm{R}^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}}{1+\mathrm{R}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\mathrm{R}}^0 \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}p\pi/n}x^p}{1+x^n}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})$$

d'où $\left(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p+1)\pi/n}\right)\displaystyle\int_0^{\mathrm{R}} \frac{x^p}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi/n} \frac{\mathrm{R}^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}}{1+\mathrm{R}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})$

Pour obtenir la valeur de l'intégrale, il reste deux choses à faire : montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 lorsque $\mathrm{R}\to\infty$, puis calculer le résidu de F en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$.

Calcul du résidu
La singularité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ est simple, donc

$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}) = \lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}} (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})\mathrm{F}(z)$$

On a
$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})\mathrm{F}(z) &= (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})\frac{z^p}{1+z^n}\\ &= \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}{1+z^n}\,z^p\end{aligned}$$

Notons $\mathrm{Q}(z) = 1+z^n$. On a alors

$$\frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}{1+z^n} = \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}{\mathrm{Q}(z)} = \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}{\mathrm{Q}(z)-\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})}$$

On reconnaît le taux d'accroissement de Q au voisinage de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$. On en déduit que

$$\lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}} \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}{1+z^n} = \frac{1}{\mathrm{Q}'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})} = \frac{1}{n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi/n}}$$

d'où $\quad \mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}) = \displaystyle\lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}} (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})\mathrm{F}(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi/n}}{n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi/n}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}$

Limite de l'intégrale sur l'arc de cercle

> **Lemme de Jordan**
> Étant donné une fonction de la variable complexe f, continue au voisinage de l'infini, telle que $|zf(z)|$ tende vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini, et un chemin circulaire Γ_{R}, d'angle α, de centre O, et de rayon R, alors l'intégrale
>
> $$\mathrm{I}(\mathrm{R}) = \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} f(z)\,\mathrm{d}z$$
>
> tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

La fonction F est telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |z\mathrm{F}(z)| \to 0$. On en déduit que son intégrale sur le chemin circulaire de rayon R et d'angle $2\pi/n$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini, d'après le lemme de Jordan.

Fin du calcul

On a donc obtenu

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p+1)\pi/n}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}$$

Il reste à faire disparaître les nombres complexes de cette expression

$$\begin{aligned}1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p+1)\pi/n} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+1)\pi/n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}\right)\\ &= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}\sin\left(\frac{(p+1)\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

soit $$-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}\sin\left(\frac{(p+1)\pi}{n}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\pi/n}$$

Finalement $$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\left(\dfrac{(p+1)\pi}{n}\right)}}$$

Exercice 4

On cherche à calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

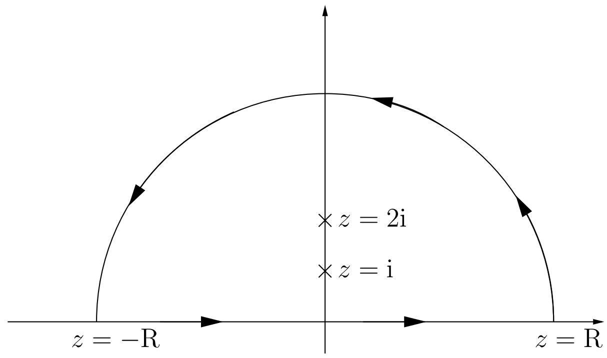
> **Calcul des intégrales de la forme** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$
>
> Pour calculer les intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$, on pose
>
> $$\mathrm{F} : z \longmapsto \frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{Q}(z)}.$$
>
> On intègre sur le bord d'un demi disque, de diamètre $[-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}]$. On écrit ensuite la formule des résidus, et on obtient la valeur de l'intégrale en faisant tendre R vers $+\infty$.

Posons $$\mathrm{F} : z \longmapsto \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Cherchons les singularités de F. F est singulière, si $z^2+1=0$, ou si $z^2+4=0$. Les points singuliers de F sont donc i, $-$i, 2i, et $-$2i. Ces singularités sont simples.

Notons $\mathscr{C}$ le lacet de $\mathbb{C}$ composé

- du segment $[-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}]$,
- du demi cercle de rayon R, pour un angle variant entre 0 et π, que l'on note $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}$.



Alors pour R suffisamment grand, les singularités i et 2i sont à l'intérieur du lacet, et la formule des résidus donne

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\,(\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i}) + \mathrm{Res}(\mathrm{F},2\mathrm{i}))$$

La fonction F est telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |z\mathrm{F}(z)| = 0$. On en déduit, d'après le lemme de Jordan, que

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

d'où
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\mathrm{i}\pi\,(\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i}) + \mathrm{Res}(\mathrm{F},2\mathrm{i}))$$

Il reste à calculer les résidus de F aux points i et 2i. Ces singularités sont simples, donc on a

$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}} (z-\mathrm{i})\mathrm{F}(z)$$
$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} (z-2\mathrm{i})\mathrm{F}(z)$$

- **Calcul du résidu en** i

  on a
  $$(z-\mathrm{i})\mathrm{F}(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{G}(z)-\mathrm{G}(\mathrm{i})}$$

  où on a posé $\mathrm{G}(z) = z^4+5z^2+4$. On reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de G, on en déduit que

  $$\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{G}(z)-\mathrm{G}(\mathrm{i})} = \frac{1}{\mathrm{G}'(\mathrm{i})}$$

  d'où
  $$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i}) = \frac{1}{\mathrm{G}'(\mathrm{i})}$$

  soit
  $$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{6}$$

- **Calcul du résidu en** $2\mathrm{i}$
  En reprenant le calcul du résidu en i, on obtient
$$\mathrm{Res}(\mathrm{F}, 2\mathrm{i}) = \frac{1}{\mathrm{G}'(2\mathrm{i})}$$
  d'où
$$\mathrm{Res}(\mathrm{F}, 2\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{12}$$

On obtient ainsi
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}}$$

Exercice 5

On cherche à calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$$

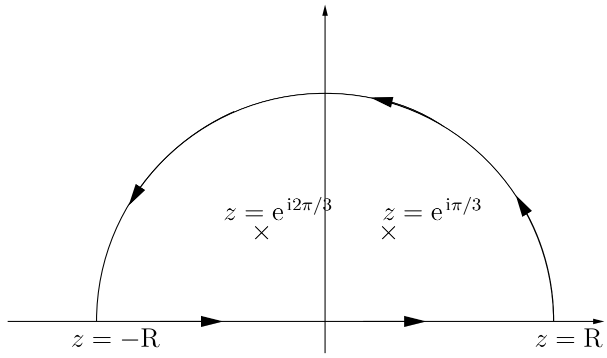
Notons
$$\mathrm{F} : z \longmapsto \frac{1}{1+z^2+z^4}$$

La fonction F est singulière lorsque $1+z^2+z^4 = 0$. Cherchons ces singularités. Pour cela, commençons par résoudre z^2+z+1. Son discriminant est égal à $-3 = (\mathrm{i}\sqrt{3})^2$, donc ses racines sont
$$\frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$
Sous forme exponentielle, ces racines sont $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$. Pour trouver les racines de $1+z^2+z^4$, il suffit de calculer les racines carrées de celles de z^2+z+1.

- **Racines carrées de** $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$
$$\begin{aligned}
z^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left|z^2\right| = \left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right| \\ \mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}) + 2k\pi \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ 2\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \\
z^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$
  Donc les deux racines carrées de $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$
- **Racines carrées de** $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$
$$\begin{aligned}
z^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left|z^2\right| = \left|\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}\right| \\ \mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}) + 2k\pi \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ 2\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \\
z^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Arg}(z) = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$
  Donc les deux racines carrées de $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ sont $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3}$

Intégrons F le long du contour défini par

- un segment $[-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}]$,
- un demi cercle de rayon R, pour un angle variant entre 0 et π, que l'on note $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}$.



Alors pour R suffisamment grand, les singularités $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ sont à l'intérieur du lacet, et la formule des résidus donne

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1} + \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\left(\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}) + \mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})\right)$$

La fonction F est telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |z\mathrm{F}(z)| = 0$. On en déduit, d'après le lemme de Jordan, que

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

d'où
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1} = 2\mathrm{i}\pi\left(\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}) + \mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})\right)$$

Il reste à calculer les résidus en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Comme ceux-ci sont simples, on a

$$\begin{cases} \mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}) = \lim\limits_{z\to\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}} (z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})\mathrm{F}(z) \\ \mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}) \;= \lim\limits_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})\mathrm{F}(z) \end{cases}$$

- **Calcul du résidu en** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$

  Notons $\mathrm{G} : z \mapsto z^4+z^2+1$. On a alors

  $$\begin{aligned} (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})\mathrm{F}(z) &= \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{\mathrm{G}(z)} \\ &= \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{\mathrm{G}(z)-\mathrm{G}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})} \end{aligned}$$

  On reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de G. On en déduit que

  $$\lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})\mathrm{F}(z) = \frac{1}{\mathrm{G}'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})}$$

  Comme $\mathrm{G}'(z) = 4z^3+2z$, il vient

  $$\mathrm{G}'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}) = 4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/3} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = -4 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$$

- **Calcul du résidu en** $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$
  Notons $\mathrm{G} : z \mapsto z^4 + z^2 + 1$. On a alors
  $$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})\mathrm{F}(z) &= \frac{z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}{\mathrm{G}(z)}\\ &= \frac{z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}{\mathrm{G}(z)-\mathrm{G}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})}\end{aligned}$$
  On reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de G. On en déduit que
  $$\lim_{z\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}} (z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})\mathrm{F}(z) = \frac{1}{\mathrm{G}'(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})}$$
  Comme $\mathrm{G}'(z) = 4z^3 + 2z$, il vient
  $$\mathrm{G}'(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}) = 4\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/3} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = 4 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$$

On obtient ainsi
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4} &= 2\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{-4+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} + \frac{1}{4+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}\right)\\ &= 2\mathrm{i}\pi\left(\frac{4+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}-4+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{(-4+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(4+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})}\right)\\ &= 2\mathrm{i}\pi\,\frac{4\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-16+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}-8\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}\\ &= \frac{-8\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-20+16\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{-8\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}{-20+8}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4} &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}}$$

Exercice 6

On cherche à calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

> **Calcul des intégrales de la forme** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$ Pour calculer les intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$, on pose
> $$\mathrm{F} : z \longmapsto \frac{\mathrm{P}(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{\mathrm{Q}(z)}.$$

On intègre sur le bord d'un demi disque, de diamètre $[-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}]$. On écrit ensuite la formule des résidus, et on obtient la valeur de l'intégrale en faisant tendre R vers $+\infty$.

Calcul des intégrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\cos(\alpha x)}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$ **et** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\sin(\alpha x)}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$

Pour calculer les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha x}}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\sin(\alpha x)}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x,$$

il suffit de prendre la partie réelle et la partie imaginaire du calcul de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha x}}{\mathrm{Q}(x)}\,\mathrm{d}x$$

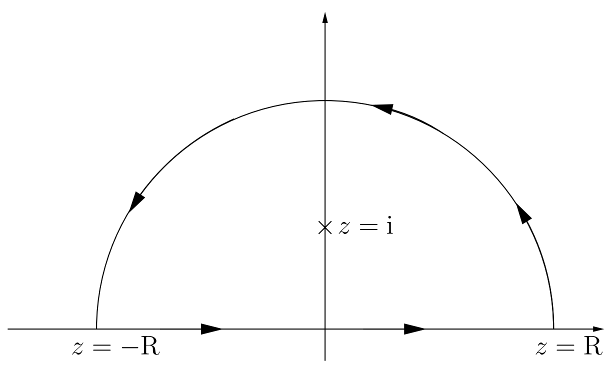
L'intégrale qu'on cherche à calculer est la partie imaginaire de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

Posons
$$\mathrm{F} \,:\, z \longmapsto \frac{z\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^3}$$

La fonction F est singulière lorsque $z^2+1=0$, c'est à dire si $z=\pm\mathrm{i}$. Ces singularités sont triples. Intégrons F le long du contour défini par

- un segment $[-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}]$,
- un demi cercle de rayon R, pour un angle variant entre 0 et π, que l'on note $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}$.



Alors pour R suffisamment grand, seule la singularité i est à l'intérieur du lacet, et la formule des résidus donne

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{x\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x + \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i})$$

Montrons que $|z\mathrm{F}(z)|$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}|z\mathrm{F}(z)| &= \left|z\,\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^3}\right| \\ &= \frac{|z^2|\,\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right|}{|(1+z^2)^3|} \\ &= \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right|}{|z^4|\left|1+\dfrac{1}{z^2}\right|^3}\end{aligned}$$

Notons $z = a + \mathrm{i}b$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right| &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)}\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a-b}\right| \\ &= \mathrm{e}^{-b} \\ \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right| &\leqslant 1\end{aligned}$$

car $\mathrm{Im}\,(z) \geqslant 0$, car on intègre sur le demi plan supérieur. On en déduit que

$$|z\mathrm{F}(z)| \leqslant \frac{1}{|z^4|\left|1+\dfrac{1}{z^2}\right|^3} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

D'après le lemme de Jordan, il vient

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_\mathrm{R}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

> **Attention !**
> Si l'hypothèse du lemme de Jordan, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = 0$ est facile à vérifier si f est une fraction rationnelle, elle est plus difficile à prouver dès lors qu'il y a des exponentielles. En particulier,
>
> **L'assertion $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right| \leqslant 1$ est fausse en général.**

On a donc trouvé que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i})$$

Il reste à calculer le résidu de F en i. Le pôle i de F est triple, donc son développement en série de Laurent au voisinage de i est de la forme

$$\mathrm{F}(z) = \frac{a_{-3}}{(z-\mathrm{i})^3} + \frac{a_{-2}}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{a_{-1}}{z-\mathrm{i}} + g(z)$$

où g est une fonction holomorphe. Posons $z = \mathrm{i} + h$. On a alors, en multipliant par h^3

$$h^3\mathrm{F}(\mathrm{i}+h) = a_{-3} + a_{-2}h + a_{-1}h^2 + h^3 g(\mathrm{i}+h)$$

Comme g est holomorphe, elle est bornée au voisinage de i, donc le développement devient

$$h^3\mathrm{F}(\mathrm{i}+h) = a_{-3} + a_{-2}h + a_{-1}h^2 + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

Le résidu de F en i apparaît donc comme le coefficient d'ordre 2 du développement de $h^3\mathrm{F}(\mathrm{i}+h)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} h^3\mathrm{F}(\mathrm{i}+h) &= \frac{(\mathrm{i}+h)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\mathrm{i}+h)}}{(2\mathrm{i}+h)^3} \\ &= \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}h)\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}h}}{-8\mathrm{i}\left(1+\dfrac{h}{2\mathrm{i}}\right)^3} \\ &= -\frac{1}{8\mathrm{e}}\,\frac{(1-\mathrm{i}h)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}h}}{\left(1+\dfrac{h}{2\mathrm{i}}\right)^3} \end{aligned}$$

Développons chacun des facteurs. Le facteur $1-\mathrm{i}h$ est déjà développé. Par ailleurs,

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}h} = 1+\mathrm{i}h-\frac{h^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1+\dfrac{h}{2\mathrm{i}}\right)^3} &= \left(1-\frac{h}{2\mathrm{i}}+\frac{h^2}{(4\mathrm{i})^2}+\mathrm{O}\left(h^3\right)\right)^3 \\ &= \left(1+\frac{\mathrm{i}h}{2}-\frac{h^2}{4}+\mathrm{O}\left(h^3\right)\right)^3 \\ &= 1+\frac{3\mathrm{i}h}{2}-\frac{3h^2}{2}+\mathrm{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

Il reste à effectuer le produit :

$$\begin{aligned} &(1-\mathrm{i}h)\left(1+\mathrm{i}h-\frac{h^2}{2}+\mathrm{O}\left(h^3\right)\right)\left(1+\frac{3\mathrm{i}h}{2}-\frac{3h^2}{2}+\mathrm{O}\left(h^3\right)\right) \\ &= \left(1-\mathrm{i}h+\mathrm{i}h+\frac{3\mathrm{i}h}{2}-\frac{h^2}{2}-\frac{3h^2}{2}+h^2\left(-\mathrm{i}^2-\frac{3\mathrm{i}^2}{2}+\frac{3\mathrm{i}^2}{2}\right)+\mathrm{O}\left(h^3\right)\right) \\ &= 1+\frac{3\mathrm{i}h}{2}-h^2+\mathrm{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

On en déduit que
$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{i}) = \frac{1}{8\mathrm{e}}$$

Soit
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\pi\,\frac{1}{8\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{i}\pi}{8\mathrm{e}}$$

En prenant la partie imaginaire du résultat trouvé, on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8\mathrm{e}}}$$

Exercice 7

On cherche à calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

On remarque que si on change α en $-\alpha$, le résultat est inchangé, car cos est paire. On suppose donc que $\alpha > 0$. Posons

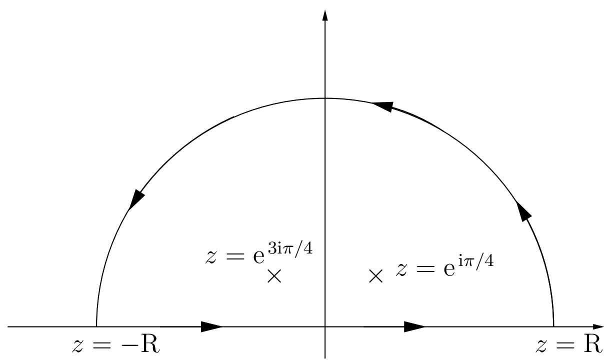
$$\mathrm{F} \,:\, z \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha z}}{1+z^4}$$

Commençons par déterminer les singularités de F.

$$\begin{aligned}
z^4+1=0 &\iff z^4=-1\\
&\iff \begin{cases} |z^4| = |-1| \\ \mathrm{Arg}(z^4) = \mathrm{Arg}(-1) + 2k\pi \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ 4\mathrm{Arg}(z) = \pi + 2k\pi \end{cases}\\
z^4+1=0 &\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Arg}(z) = \dfrac{(2k+1)\pi}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que les singularités de F sont $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{e}^{\,3\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{e}^{\,5\mathrm{i}\pi/4}$ et $\mathrm{e}^{\,7\mathrm{i}\pi/4}$. Intégrons F le long du contour défini par

- un segment $[\,-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,]$,
- un demi cercle de rayon R, pour un angle variant entre 0 et π, que l'on note $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}$.



Alors pour R suffisamment grand, seules les singularité $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/4}$ et $\mathrm{e}^{\,3\mathrm{i}\pi/4}$ sont à l'intérieur du lacet, et la formule des résidus donne

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha x}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{R}}} \mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\left(\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/4}) + \mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{\,3\mathrm{i}\pi/4})\right)$$

Montrons que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}_R} F(z)\,dz = 0$. On a

$$\begin{aligned}|zF(z)| &= \frac{\left|ze^{i\alpha z}\right|}{|1+z^4|}\\ &= \frac{\left|e^{i\alpha z}\right|}{|z|^3\left|1+\dfrac{1}{z^4}\right|}\end{aligned}$$

Posons $z = a + ib$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|e^{i\alpha z}\right| &= \left|e^{i\alpha(a+ib)}\right|\\ &= \left|e^{i\alpha a-\alpha b}\right|\\ &= e^{-\alpha b}\\ \left|e^{i\alpha z}\right| &\leqslant 1\end{aligned}$$

car la partie imaginaire de z est positive, car on intègre sur le demi-plan supérieur. On en déduit que

$$|zF(z)| \leqslant \frac{1}{|z|^3\left|1+\dfrac{1}{z^4}\right|} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

D'après le lemme de Jordan, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^4+1}\,dx = 2i\pi\left(\operatorname{Res}(F, e^{i\pi/4}) + \operatorname{Res}(F, e^{3i\pi/4})\right)$$

Il reste à calculer la valeur des résidus en $e^{i\pi/4}$ et en $e^{3i\pi/4}$. Ces pôles sont simples, on a donc

$$\begin{cases}\operatorname{Res}(F, e^{i\pi/4}) = \lim\limits_{z\to e^{i\pi/4}}(z-e^{i\pi/4})F(z)\\ \operatorname{Res}(F, e^{3i\pi/4}) = \lim\limits_{z\to e^{3i\pi/4}}(z-e^{3i\pi/4})F(z)\end{cases}$$

- **Calcul du résidu en** $e^{i\pi/4}$

  Notons $G : z \mapsto z^4 + 1$

  On a
  $$\begin{aligned}(z-e^{i\pi/4})F(z) &= \frac{z-e^{i\pi/4}}{z^4+1}\,e^{i\alpha z}\\ &= \frac{z-e^{i\pi/4}}{G(z)}\,e^{i\alpha z}\\ &= \frac{z-e^{i\pi/4}}{G(z)-G(e^{i\pi/4})}\,e^{i\alpha z}\end{aligned}$$

  On reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de G au voisinage de $e^{i\pi/4}$. On en déduit que

  $$\lim_{|z|\to e^{i\pi/4}}(z-e^{i\pi/4})F(z) = \frac{e^{i\alpha e^{i\pi/4}}}{G'(e^{i\pi/4})}$$

  Or on a $G'(z) = 4z^3$. On en déduit que

  $$\operatorname{Res}(F, e^{i\pi/4}) = \frac{e^{i\alpha e^{i\pi/4}}}{4e^{3i\pi/4}}$$

- **Calcul du résidu en** $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$

On a
$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4})\mathrm{F}(z) &= \frac{z-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}{z^4+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\\ &= \frac{z-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}{\mathrm{G}(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\\ &= \frac{z-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}{\mathrm{G}(z)-\mathrm{G}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\end{aligned}$$

On reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de G au voisinage de $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$. On en déduit que
$$\lim_{|z|\to \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}(z-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4})\mathrm{F}(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}}{\mathrm{G}'(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4})}$$

Or on a $\mathrm{G}'(z)=4z^3$. On en déduit que
$$\mathrm{Res}(\mathrm{F},\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}}{4\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/4}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}$$

On obtient donc les égalités suivantes
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= 2\mathrm{i}\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}}{4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}\right)\\ &= 2\mathrm{i}\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\alpha\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}\right)\\ &= 2\mathrm{i}\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}\right)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\end{aligned}$$

> **Factorisation par l'angle moitié**
> Pour simplifier une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, où θ_1 et θ_2 sont des réels, il peut être judicieux de factoriser par $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}{2}}$. On a ainsi
> $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(-\theta_1+\theta_2)}{2}}\right)\\ &= 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}{2}}\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\end{aligned}$$
>
> Pour factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, on peut appliquer la même méthode, et c'est un sinus qui apparaît.

En appliquant la factorisation par l'angle moitié, on obtient
$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &\quad= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}\right)}\right)\\ &\quad= -\mathrm{i}2\cos\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\quad= -\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

d'où $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)\right)}$$

Exercice 8

On cherche à calculer les intégrales

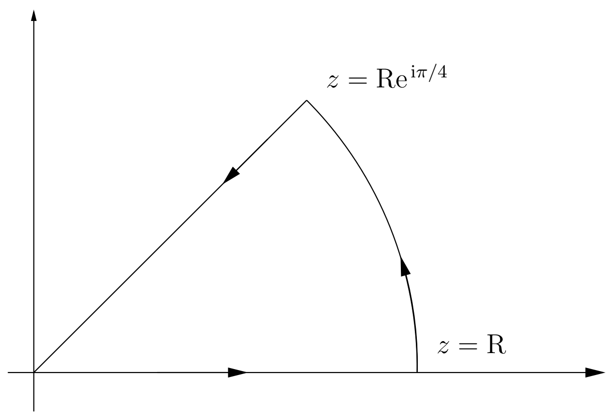
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

On a ainsi $$\mathrm{I}+\mathrm{i}\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Notons $$\mathrm{F} \,:\, z \mapsto \exp(-z^2)$$

Cette fonction est holomorphe. On en déduit que son intégrale le long de tout contour fermé est nulle. Notons $\mathscr{L}$ le lacet composé de

- du segment $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$.
- de l'arc du cercle de centre O et de rayon R pour $\theta \in \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{4}\,\right]$.
- du segment $\left[\,\mathrm{R}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/4}\,;0\,\right]$.



En paramétrant le contour par

- $x \mapsto x$ sur le segment $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$.
- $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ sur l'arc du cercle de centre O et de rayon R pour $\theta \in \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{4}\,\right]$.
- $x \mapsto x\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/4}$ sur le segment $\left[\,\mathrm{R}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/4}\,;0\,\right]$.

on obtient l'égalité

$$\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \mathrm{i}\mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\mathrm{R}}^0 \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}x)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}x = 0$$

En simplifiant les termes, il vient

$$\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \mathrm{i}\mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}x$$

On voudrait faire tendre R vers $+\infty$: la limite de la première intégrale est connue, la troisième est celle que l'on cherche à calculer. On voudrait donc connaître la limite de la seconde.

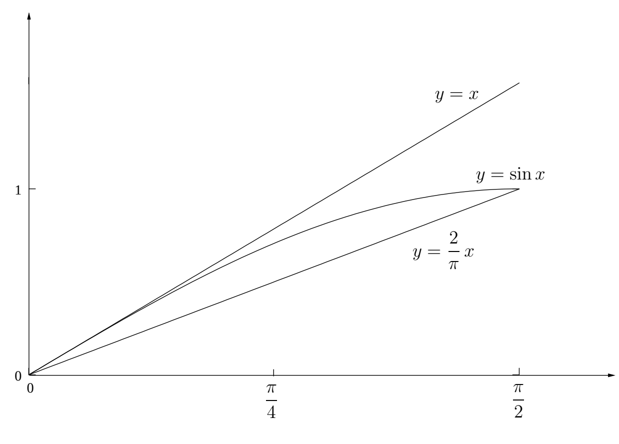
> **Remarque**
> Ici, on ne peut pas appliquer le lemme de Jordan pour la raison suivante. Lorsque $z = \mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, alors $|z\mathrm{F}(z)| = \mathrm{R}$, et ne tend pas vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.
> Comme le problème se situe pour $\theta = \pi/4$, on va faire un changement de variable pour se ramener au voisinage de ce point, et linéariser l'expression (après avoir majoré l'intégrale).

Commençons par majorer l'intégrale qui nous intéresse. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \mathrm{i}\mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| &\leqslant \int_0^{\pi/4} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\right| \mathrm{R}\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \int_0^{\pi/4} \mathrm{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Pour ramener le problème de l'intégrande au voisinage du point qui nous intéresse, posons $\theta = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{h}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \mathrm{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta &= \int_{\pi/2}^0 \mathrm{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)} \left(-\frac{\mathrm{d}h}{2}\right) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{R}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2\sin h}\,\mathrm{d}h\end{aligned}$$



Sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\dfrac{2}{\pi}\,x \leqslant \sin x \leqslant x$, on en déduit la série d'inégalités suivante

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\,h \leqslant &\quad \sin h \quad \leqslant h\\
-\mathrm{R}^2 h \leqslant &\quad -\mathrm{R}^2 \sin h \quad \leqslant -\frac{2h}{\pi}\,\mathrm{R}^2\\
\frac{\mathrm{R}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2 h} \leqslant &\quad \frac{\mathrm{R}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2 \sin h} \quad \leqslant \frac{\mathrm{R}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{R}^2 h}{\pi}}\\
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{R}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2 h}\,\mathrm{d}h \leqslant &\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{R}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2 \sin h}\,\mathrm{d}h \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{R}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{R}^2 h}{\pi}}\,\mathrm{d}h\\
\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{R}^2}\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{R}^2\pi}{2}\right)\right) \leqslant &\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{R}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2 \sin h}\,\mathrm{d}h \leqslant \frac{\pi\mathrm{R}}{4\mathrm{R}^2}\,\left(1-\exp\left(-\mathrm{R}^2\right)\right)
\end{aligned}$$

De plus on a
$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{R}^2}\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{R}^2\pi}{2}\right)\right) = 0$$
$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \frac{\pi\mathrm{R}}{4\mathrm{R}^2}\,\left(1-\exp\left(-\mathrm{R}^2\right)\right) = 0$$

On obtient ainsi
$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{R}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2 \sin h}\,\mathrm{d}h = 0$$

d'où
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}x$$

ou encore
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1-\mathrm{i}))$, il vient finalement

$$\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{J} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}}$$