ISTIL 2ème année, parcours MAM

Optimisation Continue — Année 2007/2008

Feuille 3

1. **Méthode du Gradient à pas variable**

   Soit V un espace de Hilbert réel, et $\mathrm{J} : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe deux constantes α et M telles que

   $$\alpha > 0 \text{ et } \forall (u,v) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V} \qquad (\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v), u - v) \geqslant \alpha \|v - u\|^2 \quad (1)$$

   $$\forall (u,v) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V} \qquad \|\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v)\| \leqslant \mathrm{M} \|v - u\| \quad (2)$$

   On cherche à résoudre le problème sans contrainte

   $$\text{Trouver } u \in \mathrm{V} \qquad \mathrm{J}(u) = \inf \{\mathrm{J}(v) \quad v \in \mathrm{V}\} \quad (3)$$

   en utilisant la méthode du gradient à pas variable, qui consiste en la construction d'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

   $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{k+1} = u_k + \rho_k \mathrm{J}'(u_k)$$

   Les paramètres ρ_k seront ajustés au cours des itérations selon des critères particuliers.

   (a) Montrer que le problème (3) a une solution unique ; comment est-elle caractérisée ?

   (b) Montrer que

   $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_{k+1} - u\|^2 \leqslant \tau(\rho_k) \|u_k - u\|^2$$

   où $\tau(\rho)$ est un trinôme du second degré.

   (c) En déduire que, s'il existe deux nombres a et b tels que

   $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 0 < a \leqslant \rho_k \leqslant b < \frac{2\alpha}{\mathrm{M}^2}$$

   la méthode de gradient à pas variable converge, et que la convergence est géométrique :

   $$\exists \beta \in]\,0\,;1\,[\qquad \|u_k - u\| \leqslant \beta^k \|u_0 - u\|$$

   (d) Les conditions sont-elles vérifiées pour une fonctionnelle quadratique elliptique

   $$\mathrm{J} : v \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{1}{2}(\mathrm{A}v, v) - (b, v)$$

   Que représentent alors α et M ?

2. **Méthode** B **de Quasi-Newton**

   Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ayant un unique zéro $x^\star \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la matrice Jacobienne de f, $f'(x)$ est inversible pour tout x. On considère la méthode de Newton

   $$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

où on remplace $f'(x_k)$ par une approximation B_k

$$f(x_k) + \mathrm{B}_k(x_{k+1} - x_k) = 0 \tag{1}$$

On notera $s_k = x_{k+1} - x_k$ (non nul, car sinon, l'algorithme a convergé), et $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$, et pour alléger les notations, on oublie les indices k quand cela est possible. On appelle méthode B la méthode obtenue en imposant

$$f(x_k) = f(x_{k+1}) + \mathrm{B}_{k+1}(x_k - x_{k+1}) \tag{2}$$

(a) Représenter graphiquement la méthode (1), (2) pour $n = 1$.

(b) On se donne s, B, y. Pour $n \geqslant 2$, la relation (2) qui s'écrit

$$\bar{\mathrm{B}}s = y \tag{3}$$

ne suffit pas à déterminer $\bar{\mathrm{B}}$. On impose en plus

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad {}^t z\, s = 0 \qquad \bar{\mathrm{B}}z = \mathrm{B}z \tag{4}$$

Vérifier que

$$\bar{\mathrm{B}} = \mathrm{B} + \frac{(y - \mathrm{B}s)\,{}^t s}{{}^t s\, s} \tag{5}$$

est l'unique solution de (3), (4).

(c) Montrer que $\bar{\mathrm{B}}$ est l'unique solution du problème

$$\inf \left\{ \|\widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{B}\|_{\mathrm{F}} \quad \widehat{\mathrm{B}}s = y \right\}$$

où $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ est la norme de Froebenius : $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2$ (on utilisera la matrice $\mathrm{C} = \bar{\mathrm{B}} - \mathrm{B}$). La méthode B est donc définie par (1), et

$$\mathrm{B}_{k+1} = \mathrm{B}_k + \frac{(y_k - \mathrm{B}_k s_k)\,{}^t s_k}{{}^t s_k\, s_k} \tag{6}$$

pour $s_k \neq 0$. On montrera que le calcul de B_{k+1} à partir de B_k ne nécessite que celui des n fonctions composantes de $f(x_k)$, au lieu des n^2 de $f'(x_k)$. Le but de ce qui suit est de montrer que l'on peut éviter dans (1) la résolution du système $n \times n$ en $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ opérations élémentaires, en remplaçant (6) par une récurrence sur $\mathrm{H}_k = \mathrm{B}_k^{-1}$.

(d) Soit A une matrice $n \times n$ régulière. Montrer que $\mathrm{A} + u\,{}^t v$ est régulière si et seulement si $\sigma = 1 + {}^t v\, \mathrm{A}^{-1} u \neq 0$, et que alors

$$(\mathrm{A} + u\,{}^t v)^{-1} = \mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\sigma}\, \mathrm{A}^{-1} u\,{}^t v\, \mathrm{A}^{-1}$$

(e) En déduire que la méthode B de (1), (6) peut s'écrire

$$x_{k+1} = x_k - \mathrm{H}_k f(x_k) \tag{7}$$

$$\mathrm{H}_{k+1} = \text{une expression dépendant de } s_k, \mathrm{H}_k \text{ et } y_k \text{ à préciser} \tag{8}$$

$$\text{à condition que } {}^t s_k\, \mathrm{H}_k y_b \neq 0$$

(f) Quel est le nombre d'opérations élémentaires en $\mathrm{O}\left(n^{\omega}\right)$ nécessaires à l'exécution de (8) ?