ISTIL 2ème année, parcours MAM

Optimisation Continue Année 2007/2008

TP 2 : Optimisation d'un portefeuille ; Méthode d'Uzawa.

Introduction

En investissement boursier, le but de l'investisseur est d'obtenir un rendement donné en minimisant le risque. Par exemple, un portefeuille contenant une seule action peut être très rentable si l'entreprise distribue beaucoup de dividendes, mais est très risqué en cas de difficulté de cette entreprise.

Afin d'amoindrir la dépendance du risque vis à vis de la santé d'une seule entreprise, une idée consiste à « panacher » plusieurs actions. Un panachage simple peut être également très risqué si les entreprises sur lesquelles on investit ont une rentabilité effective corrélée à des facteurs semblables. Par exemple, si on investit sur plusieurs entreprises d'industrie lourde, les résultats seront fortement liés aux prix du pétrole et des matières premières. Une solution est donc de panacher plusieurs actions, dont les risques corrélés sont faibles, ou au moins contrôlés : un portefeuille bien équilibré peut par exemple être composé d'une action d'industrie lourde (agro-alimentaire, metallurgie, automobile, etc...), une action nouvelle technologie (téléphonie, internet, etc...), et une de placement immobilier.

Toute la qualité du modèle réside dans la connaissance des risques corrélés. Celui-ci peut par exemple être connu heuristiquement par des mesures des évolutions boursières passées. Ce risque n'a donc qu'une valeur prédictive limitée.

Modèle (de Markowitz)

On dispose d'un capital normalisé à 1. On désire obtenir un rendement r. Pour cela, on dispose de n actions de rendement r_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. On investit une portion x_i dans chacune des actions. Le risque corrélé d'un investissement x est donné par

$$\mathrm{J}(x) = \langle \mathrm{A}x, x \rangle$$

où A est une matrice de covariance, sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r \end{cases}$$

1. Méthode de pénalisation

On se donne une fonction J à minimiser, sous certaines contraintes. On se donne une fonction C, nulle lorsque les contraintes sont vérifiées, et strictement positive sinon. La méthode de pénalisation consiste à minimiser la fonctionnelle

$$x \longmapsto \mathrm{J}(x) + \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{C}(x)$$

avec $\varepsilon \to 0$. On remarque que cette fonction est minimale lorsque C est nulle, c'est à dire lorsque les contraintes sont vérifiées, et lorsque J est minimale.

Pour une fonction donnée, compléter le calcul de la fonctionnelle pénalisée.

Applications :

- Tester la méthode sur la minimisation de la fonction $x^2 + y^2$, sous la contrainte $x + y - 1 = 0$.
- Trouver le portefeuille optimal pour un portefeuille dont le risque corrélé est donné par[1] la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,0036 & 0,0015 \\ 0,0036 & 0,0144 & 0,0072 \\ 0,0015 & 0,0072 & 0,0225 \end{pmatrix}$$

et dont les rendements sont donnés par

$$r_1 = 0,05 \qquad r_2 = 0,08 \qquad r_3 = 0,10$$

Étudier en particulier les valeurs de la fonctionnelle J selon les variations de ε.

2. Méthode d'Uzawa

La méthode de pénalisation présente un problème d'un point de vue numérique : lorsque $\varepsilon \to 0$, elle a tendance à donner "trop" de poids aux contraintes par rapport à la fonctionnelle que l'on minimise. On s'intéresse maintenant à la méthode d'Uzawa : on définit le *Lagrangien* du problème par

$$\mathscr{L}(x,\lambda) = \mathrm{J}(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$$

On peut alors montrer que, sous de bonnes hypothèses,

J est minimale au point x sous les contraintes $\varphi_i = 0 \Longleftrightarrow x$ est un point selle de $\mathscr{L}$

En notant $x^\star$ et $\lambda^\star$ les solutions du problème, ceci peut se reformuler sous la forme

$$\mathscr{L}(x^\star,\lambda) \leqslant \mathscr{L}(x^\star,\lambda^\star) \leqslant \mathscr{L}(x,\lambda^\star)$$

Proposer deux algorithmes permettant de trouver une solution au problème.

[1] source : Louis Esch, Robert Kieffer, Thierry Lopez. *Asset and risk management. La finance orientée « risques ».* Il est à plus de 100 euros, ce qui prouve bien que le meilleur moyen de gagner de l'argent reste d'écrire des livres de maths.