

Optimisation Continue

ISTIL 2ème année

Corrigé de la feuille 4¹

EXERCICE 1

Rappel : Méthode de la plus profonde descente (méthode du gradient à pas optimal)

La méthode de la plus profonde descente (ou méthode de gradient à pas optimal) est une méthode de gradient qui consiste à optimiser globalement la fonctionnelle dans la direction du gradient.

D'une manière générale, la méthode du gradient à pas optimal s'écrit

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ est donné} \\ f(x^{(k)} - \rho^{(k)} \nabla f(x^{(k)})) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} \{x^{(k)} - \rho \nabla f(x^{(k)})\} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \rho^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) \end{cases}$$

Dans notre cas, on a

$$\nabla f(x_0, y_0) = {}^t(8x_0 - 4y_0, -4x_0 + 4y_0)$$

On part de $x^{(0)} = {}^t(2, 3)$

• Première itération

on a $\nabla f(x^{(0)}) = {}^t(4, 4)$

d'où
$$\begin{aligned} x^{(0)} - \rho \nabla f(x^{(0)}) &= {}^t(2, 3) - \rho {}^t(4, 4) \\ &= {}^t(2 - 4\rho, 3 - 4\rho) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x^{(0)} - \rho \nabla f(x^{(0)})) &= 4(2 - 4\rho)^2 - 4(2 - 4\rho)(3 - 4\rho) + 2(3 - 4\rho)^2 \\ &= 10 - 32\rho + 32\rho^2 \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho = 1/2$. On trouve ainsi

$$x^{(1)} = {}^t(0, 1)$$

¹généré avec L^AT_EX 2_ε. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à perrier@math.u-bordeaux1.fr

• Deuxième itération

on a
$$\nabla f(x^{(0)}) = {}^t(-4, 4)$$

d'où
$$\begin{aligned} x^{(1)} - \rho \nabla f(x^{(1)}) &= {}^t(0, 1) - \rho {}^t(-4, 4) \\ &= {}^t(4\rho, 1 - 4\rho) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x^{(1)} - \rho \nabla f(x^{(1)})) &= 4(4\rho)^2 - 4(4\rho)(1 - 4\rho) + 2(1 - 4\rho)^2 \\ &= 2 - 32\rho + 160\rho^2 \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho = 1/10$. On trouve ainsi

$$x^{(2)} = {}^t\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

• Troisième itération

on a
$$\nabla f(x^{(2)}) = {}^t\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

d'où
$$\begin{aligned} x^{(2)} - \rho \nabla f(x^{(2)}) &= {}^t\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) - \rho {}^t\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ &= {}^t\left(\frac{2}{5} - \frac{4\rho}{5}, \frac{3}{5} - \frac{4\rho}{5}\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x^{(2)} - \rho \nabla f(x^{(2)})) &= 4\left(\frac{2}{5} - \frac{4\rho}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{5} - \frac{4\rho}{5}\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{4\rho}{5}\right) + 2\left(\frac{3}{5} - \frac{4\rho}{5}\right)^2 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{32}{25}\rho + \frac{32}{25}\rho^2 \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho = 1/2$. On trouve ainsi

$$x^{(3)} = {}^t\left(0, \frac{1}{5}\right)$$

Valeurs de $f(x^{(k)})$

L'algorithme minimise bien la fonctionnelle f ; on a en effet

$$\begin{aligned} f(x^{(0)}) &= 10 & f(x^{(1)}) &= 2 \\ f(x^{(2)}) &= \frac{2}{5} & f(x^{(3)}) &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

On cherche à obtenir le zéro de la fonction

$$F : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 3 \\ x^2 + y^2 - z - 1 \\ x + y + z - 3 \end{pmatrix}$$

La méthode de Newton s'écrit

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ est donné} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - (\text{DF}(x^{(k)}))^{-1} F(x^{(k)}) \end{cases}$$

Dans notre cas on a

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Premier cas : on choisit $x^{(0)} = {}^t(1, 0, 1)$

- Première itération

On a $F(x^{(0)}) = {}^t(-1, -1, -1)$

et $\text{DF}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où

$$x^{(1)} = \boxed{{}^t\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}$$

- Deuxième itération

On a $F(x^{(1)}) = {}^t\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$

et $\text{DF}(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où

$$x^{(2)} = \boxed{{}^t\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 1\right)}$$

- Troisième itération

On a $F(x^{(2)}) = {}^t\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\right)$

et $\text{DF}(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{1} & 1 \end{pmatrix}$

d'où
$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi $F(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 32 \\ 1 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deuxième cas : on choisit $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Première itération

On a $F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

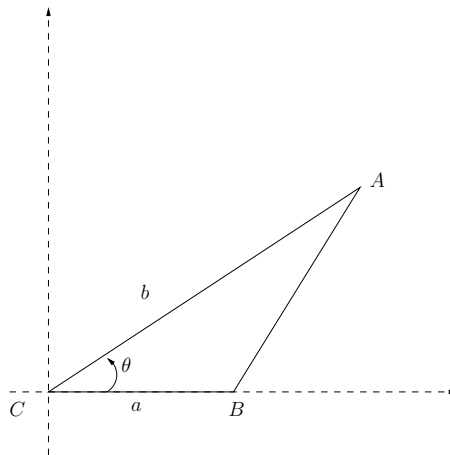
et
$$DF(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On tombe ainsi sur l'un des cas pathologiques de la méthode de Newton, lorsque la matrice DF est singulière.

EXERCICE 3

1. **Mise en équation**

Soit ABC un triangle quelconque. On note a la longueur BC, b la longueur AC, et θ la valeur absolue de l'angle (\vec{CA}, \vec{CB}) . Ces notations sont résumées sur le dessin suivant



Le vecteur \vec{OA} a pour coordonnées $(a, 0)$, et le vecteur \vec{OB} a pour coordonnées $(b \cos \theta, b \sin \theta)$. On en déduit que le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = (b \cos \theta - a) \vec{i} + b \sin \theta \vec{j}$$

On en déduit que sa longueur est égale à

$$\begin{aligned} AB^2 &= \|(b \cos \theta - a) \vec{i} + b \sin \theta \vec{j}\|^2 \\ &= (b \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \theta + a^2 - 2ab \cos \theta + b^2 \sin^2 \theta \\ AB^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} ab \sin \theta$. Le problème est donc d'optimiser la fonction

$$J(a, b, \theta) = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

sous la contrainte

$$\mathcal{C}(a, b, \theta) = a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = cste$$

2. Existence de la solution

L'ensemble

$$\left\{ (a, b, \theta) \quad \mathcal{C}(a, b, \theta) = cste \right\}$$

est un ensemble fermé car \mathcal{C} est continue. Il est borné, car $\theta \in [0; \pi]$, et car a et b sont bornés par le périmètre total du triangle. On en déduit que cet ensemble est compact. La fonction J est continue sur ce compact, donc elle y est bornée, et atteint ses bornes.

3. Conditions de Lagrange

La fonction J est dérivable. La fonction \mathcal{C} l'est aussi. De plus, son gradient vérifie

$$\nabla_{(a,b,\theta)} \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2a - 2b \cos \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \\ 1 + \frac{2b - 2a \cos \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \\ \frac{2ab \sin \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \end{pmatrix}$$

Supposons que ce vecteur soit nul. Alors la troisième composante donne ou $a = 0$, ou $b = 0$, ou $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Si $\theta = \pi$, alors les deux premières composantes ne peuvent pas être nulles. Si $\theta = 0$, alors l'une des deux premières composantes est positive strictement. Si $a = 0$, alors la deuxième composante est non nulle. Si $b = 0$, alors la première composante est non nulle. On en déduit que $\nabla \mathcal{C}$ ne peut jamais être nul. D'après le cours, si J est optimale sous la contrainte $\mathcal{C} = cste$, alors

$$\nabla_{(a,b,\theta)} J \in \text{Vect}(\nabla_{(a,b,\theta)} \mathcal{C})$$

4. Résolution du système

La condition d'optimalité signifie que les vecteurs $\nabla_{(a,b,\theta)} J$ et $\nabla_{(a,b,\theta)} \mathcal{C}$ sont colinéaires, ou encore que leur produit vectoriel est nul. On a

$$\nabla_{(a,b,\theta)} J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b \sin \theta \\ \frac{1}{2} a \sin \theta \\ \frac{1}{2} ab \cos \theta \end{pmatrix}$$

On en déduit les trois coordonnées du produit vectoriel de ces deux vecteurs sont nulles.

• Première composante

La première composante est égale, au signe près, à

$$\begin{aligned} a \sin \theta \frac{ab \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} - ab \cos \theta - \frac{ab^2 \cos^2 \theta + a^2 b \cos^2 \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \\ = \frac{a^2 b - ab^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} - ab \cos \theta \end{aligned}$$

• Deuxième composante

La deuxième composante est égale, au signe près, à

$$\begin{aligned} \frac{ab^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} - ab \cos \theta - \frac{a^2 b \cos \theta + ab^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \\ = \frac{a^2 b - ab^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} - ab \cos \theta \end{aligned}$$

• Troisième composante

La troisième composante est égale, au signe près, à

$$\begin{aligned} b \sin \theta + \frac{b^2 \sin \theta - ab \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} - a \sin \theta - \frac{a^2 \sin \theta - ab \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \\ = \sin \theta (b - a) \left(1 + \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \right) \end{aligned}$$

La nullité de la troisième composante impose que l'on ait soit $a = b$, soit $\sin \theta = 0$. La condition $\sin \theta = 0$ correspond à un triangle plat, donc à un triangle d'aire nulle. On a donc $a = b$. Les deux autres composantes sont les mêmes (au signe près). Si elles sont nulles, alors

$$\frac{a^2 b - ab^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} - ab \cos \theta = 0$$

Comme $a = b$, cette équation devient

$$\frac{a^3(1 - \cos \theta)}{\sqrt{2a^2(1 - \cos \theta)}} - a^2 \cos \theta = 0$$

ou encore
$$\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \cos \theta$$

En élevant au carré, on obtient

$$4 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

En résolvant l'équation du second degré en $\cos \theta$, on obtient

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos \theta = -1$$

Ceci implique que l'on a soit $\theta = \pi$, ce qui correspond à un triangle plat, soit $\theta = \pi/3$. On a ainsi trouvé que $a = b$ et $\theta = \pi/3$.

5. Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système

En éliminant les minima, qui correspondent à des triangles plats, on n'a trouvé qu'une seule solution : $a = b$, et $\theta = \pi/3$. Comme le maximum est atteint, il est atteint nécessairement en ce point là.

Les triangles d'aire maximale à périmètre donné sont les triangles équilatéraux.

EXERCICE 4

1. Mise en équation

Notons x, y, z les coordonnées des faces. Ainsi, les longueurs des arêtes de ce polyèdre sont égales à $2x, 2y$ et $2z$. On en déduit que le volume de ce polyèdre est égal à $8xyz$. Par ailleurs, les sommets appartiennent à l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Nous sommes ainsi amenés à optimiser la fonctionnelle

$$J : (x, y, z) \mapsto 8xyz$$

sous la contrainte $\mathcal{C} : (x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

2. Existence d'un minimum

l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{C}(x, y, z) = cste\}$

est un ensemble fermé, borné car $|x| \leq a, |y| \leq b$ et $|z| \leq c$. Donc cet ensemble est compact. On en déduit que la fonction J , qui est continue sur ce compact, y est bornée et y atteint ses bornes.

3. Condition de Lagrange

La contrainte \mathcal{C} est \mathcal{C}^1 , et

$$\nabla_{(x,y,z)} \mathcal{C} = 2 \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} \\ \frac{y}{b^2} \\ \frac{z}{c^2} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\nabla \mathcal{C}$ est non nul, sauf si $x = y = z = 0$. En dehors de ce point, une condition nécessaire d'existence du maximum est que

$$\nabla_{(x,y,z)} J \in \text{Vect}(\nabla_{(x,y,z)} \mathcal{C})$$

4. Résolution du système de Lagrange

De plus on a
$$\nabla_{(x,y,z)} J = 8 \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

d'où
$$\nabla J \wedge \nabla \mathcal{C} = 8 \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \wedge 2 \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} \\ \frac{y}{b^2} \\ \frac{z}{c^2} \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} x \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ y \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \\ z \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) \end{pmatrix}$$

On en déduit que si ce produit vectoriel est nul, et si aucune des coordonnées est nulle, alors

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Comme de plus on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

on en déduit que
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

soit
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Si l'une des coordonnées est nulle, par exemple $x = 0$, alors la condition de Lagrange implique

$$-y \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{et} \quad z \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) = 0$$

La première équation donne $y = 0$ ou $z = 0$. Si $y = 0$, alors la deuxième équation est aussi satisfaite. De même, si $z = 0$ la deuxième équation est également satisfaite. Cela signifie que si une des coordonnées est nulle, alors une autre l'est aussi. Comme on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la troisième coordonnée ne peut pas être également nulle. On trouve ainsi trois autres points vérifiant les conditions de Lagrange :

$$(a, 0, 0) \quad (0, b, 0) \quad (0, 0, c)$$

5. Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système

Les points $(a, 0, 0) \quad (0, b, 0) \quad (0, 0, c)$

correspondent à des volumes nuls, c'est à dire minimaux. Comme le maximum est atteint, il ne peut être atteint qu'en un seul points :

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

On en déduit que

Le volume du parallélépipède est maximal, si et seulement
 si $x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad x = \frac{c}{\sqrt{3}}$

EXERCICE 5

1. Mise en équation

Le problème posé se reformule de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

sous la contrainte $\mathcal{C} : (x, y) \mapsto y^2 - (x - 1)^3$

2. Existence de l'extremum

La fonctionnelle J étant coercive, elle admet un minimum sur le fermé $\mathcal{C}^{-1}(\{0\})$, car il s'agit de l'image réciproque d'un fermé par \mathcal{C} , qui est continue.

3. Condition de Lagrange

Le gradient de la contrainte \mathcal{C} est égal à

$$\nabla \mathcal{C} = {}^t (-3(x - 1)^2, 2y)$$

cette contrainte est dégénérée pour $x = 1$ et $y = 0$. En dehors de ce point, un point extrémal vérifie

$$\exists \lambda \quad \nabla J = \lambda \nabla \mathcal{C}$$

4. Résolution du système

On en déduit que le déterminant de ∇J et de $\nabla \mathcal{C}$ est nul en un point extrémal. On a

$$\nabla J(x, y) = {}^t (2x, 2y)$$

d'où

$$\det(\nabla J(x, y), \nabla \mathcal{C}(x, y)) = \begin{vmatrix} 2x & -3(x - 1)^2 \\ 2y & 2y \end{vmatrix} = 2y(3x^2 - 4x + 3)$$

Ce déterminant est nul, si et seulement si $y = 0$ ou $3x^2 - 4x + 3 = 0$. Le trinôme $3x^2 - 4x + 3$ admet pour discriminant -20 . On en déduit qu'il ne s'annule jamais. Donc le déterminant ne s'annule qu'en $y = 0$. Ce point est exclu, car il correspond à un point dégénéré pour la contrainte.

5. Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système

Le problème d'optimisation admet une solution, alors que le système de Lagrange n'en admet aucune. On en déduit que le minimum est atteint au point où la contrainte est dégénérée.

J est minimale au point $(1, 0)$. Sa valeur est 1.

Remarque

Juste après, on refait l'exercice avec la contrainte $y^2 = (x - 1)^3$.

1. Mise en équation

Le problème posé se reformule de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

sous la contrainte $\mathcal{C} : (x, y) \mapsto y^2 - (x - 1)^2$

2. Existence de l'extremum

La fonctionnelle J étant coercive, elle admet un minimum sur le fermé $\mathcal{C}^{-1}(\{0\})$.

3. Condition de Lagrange

Le gradient de la contrainte \mathcal{C} est égal à

$$\nabla \mathcal{C} = {}^t(-2(x - 1), 2y)$$

cette contrainte est dégénérée pour $x = 1$ et $y = 0$. En dehors de ce point, un point extrémal vérifie

$$\exists \lambda \quad \nabla J = \lambda \nabla \mathcal{C}$$

4. Résolution du système

On en déduit que le déterminant de ∇J et de $\nabla \mathcal{C}$ est nul en un point extrémal. On a

$$\nabla J(x, y) = {}^t(2x, 2y)$$

d'où $\det(\nabla J(x, y), \nabla \mathcal{C}(x, y)) = \begin{vmatrix} 2x & -(x - 1) \\ 2y & 2y \end{vmatrix} = 4y(2x - 1)$

Ce déterminant est nul, si et seulement si $y = 0$ ou $x = 1/2$. En utilisant la contrainte, ceci implique que l'on est soit au point $(1, 0)$, soit au point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, soit au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5. Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système

On a

$$J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Au point $(1, 0)$, la contrainte est dégénérée, et $J(1, 0) = 1 > \frac{1}{4}$, qui n'est donc pas un minimum.

J est minimale aux points $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sa valeur est $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 6

1. Mise en équation

Le problème posé se reformule de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

sous la contrainte $\mathcal{C} : (x, y) \mapsto x + y + z$

2. Existence du minimum

La fonctionnelle J est coercive, donc elle admet un minimum sur le fermé $x + y + z = 1$, qui est atteint.

3. Condition de Lagrange

Le gradient de la contrainte est égal à

$$\nabla \mathcal{C} = {}^t(1, 1, 1)$$

et cette contrainte n'est jamais dégénérée. On en déduit qu'au minimum de J sous la contrainte \mathcal{C} , on a

$$\exists \lambda \quad \nabla J(x, y, z) = \lambda \nabla \mathcal{C}(x, y, z)$$

4. Résolution du système

On a $\nabla J(x, y, z) = 2(x, y, z)$

On en déduit que $\exists \lambda \quad 2(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$

Il vient alors que $x = y = z$. En prenant en plus en compte la contrainte $x + y + z = 1$, on obtient $x = y = z = 1/3$.

5. Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système

Le système de Lagrange est toujours vérifié en un extremum, car la contrainte n'est jamais dégénérée. Ce système admet une seule solution, qui est donc nécessairement le minimum.

La sphère tangente au plan $x + y + z = 1$ a pour rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$.