# Rappels de Mathématiques ISTIL 1ère année Corrigé [1]

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

### Exercice 1.1

> **Rappel : solution d'une équation différentielle du premier ordre**
> L'équation différentielle
> $$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$
> admet pour solution $\qquad x \mapsto \mathrm{K}\exp(-\int a)$
>
> où K est une constante.

$\boxed{\textbf{1.1.1}}$ On désire résoudre
$$y'(x) + y(x) = 2 + 2x$$
On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée
$$y'(x) + y(x) = 0$$
Cette équation a pour solution générale
$$x \mapsto \mathrm{K}\exp(-x)$$
où K est une constante.

> **Rappel : Méthode de variation de la constante**
> On cherche à résoudre l'équation différentielle
> $$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
> Si $y_{\mathrm{H}}$ est une solution de l'équation différentielle homogène
> $$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$
> alors la *méthode de variation de la constante* consiste à rechercher une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre sous la forme
> $$x \mapsto \mathrm{K}(x)y_{\mathrm{H}}(x)$$

[1] généré avec LaTeX $2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

Afin de déterminer la solution de l'équation avec second membre, on cherche une solution de celle-ci sous la forme $x \mapsto \mathrm{K}\exp(-x)$, où K est une fonction que l'on va déterminer. Il vient alors

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) &= \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^{-x} \\ y'(x) + y(x) &= 2 + 2x \end{aligned}$$

c'est à dire que $$\mathrm{K}'(x) = 2(1+x)\mathrm{e}^{x}$$

Il reste à intégrer K (on intègre par parties)

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(x) &= \int 2(1+x)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ &= [2(1+x)\mathrm{e}^{x}] - \int 2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{K}(x) &= 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{C} \end{aligned}$$

où C est une constante. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\{x \mapsto (2x+\mathrm{K})\mathrm{e}^{-x} \qquad \mathrm{K} \in \mathbb{R}\}.}$$

$\boxed{\mathbf{1.1.2}}$ On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) + 4y(x) = \sin(3x)\,\mathrm{e}^{-4x}$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène

$$y'(x) + 4y(x) = 0$$

Celle-ci admet pour solution les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-4x}$, où K est une constante.

On cherche maintenant une solution de l'équation différentielle avec second membre sous la forme $x \mapsto \mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-4x}$, où K est une fonction. On a alors

$$y'(x) + 4y(x) = \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^{-4x} = \sin(3x)\,\mathrm{e}^{-4x}$$

d'où $$\mathrm{K}'(x) = \sin(3x)$$

soit $$\mathrm{K}(x) = -\frac{\cos(3x)}{3} + \mathrm{C}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(\mathrm{K} - \frac{\cos(3x)}{3}\right)\mathrm{e}^{-4x} \qquad \mathrm{K} \in \mathbb{R}\right\}.}$$

## Exercice 1.2

$\boxed{\textbf{1.2.1}}$ On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$2x^2y'(x) + y(x) = 1$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène

$$2x^2y'(x) + y(x) = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme

$$x \mapsto \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2}\right) = \mathrm{K}\exp\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Où K est une constante. Cherchons à présent une solution de l'équation différentielle avec second membre, sous la forme

$$x \mapsto \mathrm{K}(x)\exp\left(\frac{1}{2x}\right)$$

On a alors

$$\left\{\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{K}(x)\exp\left(\frac{1}{2x}\right) \\ y'(x) &= \mathrm{K}'(x)\exp\left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{\mathrm{K}(x)}{2x^2}\exp\left(\frac{1}{2x}\right) \end{aligned}\right.$$

d'où
$$\mathrm{K}'(x) = \frac{1}{2x^2}\exp\left(\frac{1}{2x}\right)$$

On en déduit que
$$\mathrm{K}(x) = \exp\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(\mathrm{K} + \exp\left(-\frac{1}{2x}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{2x}\right) \qquad \mathrm{K} \in \mathbb{R}\right\}.}$$

$\boxed{\textbf{1.2.2}}$ On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy'(x) = y(x)(1 - x\tan x) + x^2\cos x$$

Commençons par résoudre l'équation différentielle homogène

$$xy'(x) - y(x)(1 - x\tan x) = 0$$

Cette équation différentielle a pour solution

$$x \mapsto \exp\left(\int \left(\frac{1}{u} - \tan u\right)\,\mathrm{d}u\right)$$

En outre
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{u}-\tan u\right)\,\mathrm{d}u &= \int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u-\int\frac{\sin u}{\cos u}\,\mathrm{d}u\\ &= \log|x|+\log|\cos x|\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc de la forme

$$x \mapsto \mathrm{K}\,|x\cos x|$$

où K est une constante. Afin de déterminer une solution de l'équation avec second membre, on cherche des solutions sous la forme

$$x \mapsto \mathrm{K}(x)\,|x\cos x|$$

En injectant cette dernière expression dans l'équation, on obtient

$$\mathrm{K}'(x)\,|x\cos x| = x\cos x$$

d'où
$$\mathrm{K}'(x)=\frac{x\cos x}{|x\cos x|}=\varepsilon$$

où $\varepsilon$ vaut 1 ou $-1$, selon le signe de $x$ et de $\cos x$ :

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon=1 & \text{si} & x\in\left]-2k\pi-\dfrac{3\pi}{2}\,;-2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right[ & k\in\mathbb{N}\\
 & \text{ou si} & x\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[ & \\
 & \text{ou si} & x\in\left]2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\,;2k\pi+\dfrac{5\pi}{2}\right[ & k\in\mathbb{N}\\
\varepsilon=-1 & \text{si} & x\in\left]2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,;2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right[ & k\in\mathbb{N}\\
 & \text{ou si} & x\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[ & \\
 & \text{ou si} & x\in\left]-2k\pi-\dfrac{5\pi}{2}\,;-2k\pi-\dfrac{3\pi}{2}\right[ & k\in\mathbb{N}
\end{array}$$

La fonction $x\mapsto\varepsilon x$ est une primitive de $x\mapsto\varepsilon x$, et on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\{x\mapsto(\varepsilon x+\mathrm{K})\,|x\cos x| \qquad \mathrm{K}\in\mathbb{R}\}\,.}$$

## Exercice 1.3

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'+xy+1=0$$

Commençons par résoudre l'équation différentielle homogène associée

$$(x^2-1)y'+xy=0$$

On a alors

$$y(x)=\mathrm{K}\exp\left(\int\frac{-x\,\mathrm{d}x}{x^2-1}\right)=\mathrm{K}\exp\left(-\frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|\right)=\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

où K est une constante. Cela veut dire qu'on a

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si} \quad |x| > 1 \\ \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

ou encore
$$y(x) = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}$$

avec
$$\begin{array}{ll} \varepsilon = 1 & \text{si} \quad |x| > 1 \\ \varepsilon = -1 & \text{si} \quad |x| < 1 \end{array}$$

Afin de résoudre l'équation différentielle avec second membre, on en cherche une solution sous la forme

$$x \mapsto \frac{\mathrm{K}(x)}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}$$

Il vient alors
$$(x^2-1)y' + xy = (x^2-1)\frac{\mathrm{K}'(x)}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = -1$$

soit
$$\mathrm{K}'(x) = -\frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}{x^2-1} = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}$$

On en déduit que
$$\begin{array}{ll} \mathrm{K}(x) = \mathrm{Arcsin}\, x & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \mathrm{K}(x) = -\mathrm{Argch}(x) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{array}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\begin{array}{l} \left\{ x \mapsto \dfrac{\mathrm{K} + \mathrm{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{K} \in \mathbb{R} \right\} \text{ si } |x| < 1 \\ \left\{ x \mapsto \dfrac{\mathrm{K} - \mathrm{Argch}\, x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \mathrm{K} \in \mathbb{R} \right\} \text{ si } |x| > 1 \end{array}}$$

Afin de déterminer le développement limité de la solution qui vaut 0 en 0, on ne va pas calculer le développement limité en 0 de la solution trouvée, mais on va utiliser la formule de Taylor

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2} + \frac{y^{(3)}(0)x^3}{6} + \frac{y^{(4)}(0)x^4}{24} + \frac{y^{(5)}(0)x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

> **Rappel : formule de Taylor-Young**
> le développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ en $x_0$ s'écrit de la manière suivante
>
> $$y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \ldots \frac{(x-x_0)^n y^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

Afin de déterminer les dérivées successives de $y$, on va utiliser le fait que $y$ est solution d'une équation différentielle. En évaluant l'équation différentielle en 0, on a

$$-y'(0) + 1 = 0$$

d'où $$y'(0) = 1$$

On dérive une fois l'équation différentielle, pour obtenir

$$2xy' + (x^2-1)y'' + y + xy' = 0$$

En évaluant cette expression en 0, il vient

$$y''(0) = -y(0) = 0$$

On dérive à nouveau l'équation différentielle pour obtenir

$$(x^2-1)y^{(3)} + 5xy'' + 4y' = 0$$

On évalue cette expression en 0, ce qui donne

$$y^{(3)}(0) = 4$$

On dérive encore une fois l'équation différentielle

$$(x^2-1)y^{(4)} + 7xy^{(3)} + 9y'' = 0$$

et en évaluant en 0, on obtient

$$y^{(4)}(0) = 9y''(0) = 0$$

On dérive une dernière fois l'équation différentielle

$$(x^2-1)y^{(5)} + 9xy^{(4)} + 16y^{(3)} = 0$$

et en évaluant en 0, on obtient

$$y^{(5)}(0) = 16y^{(3)}(0) = 64$$

On en déduit le développement limité suivant

$$\boxed{y(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{8x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^5\right)}$$

## Exercice 1.4

On cherche à résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, on va chercher un changement de fonctions linéaire et constant :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

où P est une matrice $2 \times 2$. Comme P est une matrice constante, on a

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \mathrm{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'$$

Il vient alors

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathrm{P} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}$$

Afin d'obtenir deux équations découplées, on cherche P tel que la matrice

$$\mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$$

soit diagonale. Pour cela, il suffit que $\mathrm{P}^{-1}$ soit la matrice de passage entre la base canonique et une base de vecteurs propres (si une telle base existe). Étudions ainsi le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est égal à

$$\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 15$$

Le discriminant réduit de ce polynôme est égal à 16, on en déduit que la matrice est diagonalisable, avec deux racines distinctes qui sont

$$\lambda_1 = -3 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 5$$

On cherche maintenant les vecteurs propres associés à ces valeurs propres

- **Vecteur propre associé à** $-3$
  Si $(x_1, x_2)$ appartient à l'espace propre associé à la valeur propre $-3$, alors

  $$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

  On en déduit que $(2, -1)$ est un vecteur propre associé à $-3$.
- **Vecteur propre associé à** $5$
  Si $(x_1, x_2)$ appartient à l'espace propre associé à la valeur propre 5, alors

  $$\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

  On en déduit que $(2, 1)$ est un vecteur propre associé à 5.

On peut ainsi choisir $\qquad \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $\qquad \mathrm{P} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit que les fonctions $u_1$ et $u_2$ vérifient

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}$$

- **Résolution de l'équation en $u_1$**
La fonction $u_1$ vérifie l'équation
$$u_1' = -3u_1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3x}$$
On commence par résoudre l'équation différentielle homogène
$$u_1' = -3u_1$$
dont la solution est $x \mapsto \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{-3x}$. Pour déterminer une solution de l'équation avec second membre, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto \mathrm{K}_1(x)\mathrm{e}^{-3x}$. On trouve alors
$$\mathrm{K}_1'\mathrm{e}^{-3x} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3x}$$
soit
$$\mathrm{K}_1' = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}$$
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation en $u_1$ est
$$\left\{ x \mapsto \left( \mathrm{C}_1 - \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{e}^{4x}}{16} \right) \exp\left(-3x\right) \qquad \mathrm{C}_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$
- **Résolution de l'équation en $u_2$**
La fonction $u_2$ vérifie l'équation
$$u_2' = 5u_2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3x}$$
On commence par résoudre l'équation différentielle homogène
$$u_2' = 5u_2$$
dont la solution est $x \mapsto \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{5x}$. Pour déterminer une solution de l'équation avec second membre, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto \mathrm{K}_2(x)\mathrm{e}^{5x}$. On trouve alors
$$\mathrm{K}_2'\mathrm{e}^{5x} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3x}$$
soit
$$\mathrm{K}_2' = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-8x}$$
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation en $u_2$ est
$$\left\{ x \mapsto \left( \mathrm{C}_2 - \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{16} - \frac{\mathrm{e}^{-8x}}{16} \right) \exp\left(5x\right) \qquad \mathrm{C}_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Enfin, en utilisant
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
On obtient ainsi
$$\begin{aligned} y_1 &= 2u_1 + 2u_2 \\ &= 2\mathrm{C}_1\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{5x} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{8} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{8} - x\mathrm{e}^{-3x} + \frac{\mathrm{e}^{x}}{8} \\ &= 2\mathrm{C}_1\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{5x} - x\mathrm{e}^{-3x} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= -u_1 + u_2\\ &= -\mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{5x} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{16} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{16} - \frac{x\mathrm{e}^{-3x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{16}\\ &= -\mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{5x} + \frac{x\mathrm{e}^{-3x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{8} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{16}\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système différentiel est

$$\boxed{x \mapsto \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{-3x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{5x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{8} \\ \dfrac{x\mathrm{e}^{-3x}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{16} - \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{8} \end{pmatrix}}$$

## Exercice 1.5

**1.5.1** On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{sh}\, x$$

> **Rappel**
> L'équation différentielle
> $$y'' + ay' + by = 0$$
> se résout de la manière suivante. On pose l'équation caractéristique
> $$r^2 + ar + b = 0$$
> Si cette équation admet deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$, alors l'ensemble des solutions de l'équation est
> $$\left\{x \mapsto \mathrm{A}\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{r_2 x} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2\right\}$$
> Si cette équation admet une racine double $r$, alors l'ensemble des solutions de l'équation est
> $$\left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{rx} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

et admet 1 pour racine double. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc

$$\left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{x} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

> **Rappel**
> On cherche à résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre « exponentielle-polynôme » de la forme
>
> $$y'' + ay' + by = \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$
>
> où P est un polynôme non nul. Alors la solution générale de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène
>
> $$y'' + ay' + by = 0$$
>
> et d'une solution particulière. En pratique, une solution particulière se cherche sous la forme $x \mapsto \mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où Q est un polynôme. Le degré de Q doit être choisi de la manière suivante :
>
> - si $\alpha$ n'est pas racine de $r^2 + ar + b = 0$, alors $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$.
> - si $\alpha$ est racine simple de $r^2 + ar + b = 0$, alors $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P} + 1$.
> - si $\alpha$ est racine double de $r^2 + ar + b = 0$, alors $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P} + 2$.

On récrit l'équation sous la forme

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$$

On va successivement chercher une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

puis de $$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$$

- **solution de** $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$
  $-1$ n'est pas racine de $r^2 - 2r + 1$, on cherche donc une solution particulière sous la forme $x \mapsto \mathrm{A}\mathrm{e}^{-x}$. Il vient alors

  $$y'' - 2y' + y = 4\mathrm{A}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$$

  On en déduit que $$\mathrm{A} = \frac{1}{4}$$

- **solution de** $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$
  1 est racine double de $r^2 - 2r + 1$, on cherche donc une solution particulière sous la forme $x \mapsto \mathrm{A}x^2\mathrm{e}^{x}$. On a alors

  $$\left\{\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{A}x^2\mathrm{e}^{x} \\ y'(x) &= 2\mathrm{A}x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{A}x^2\mathrm{e}^{x} \\ y''(x) &= 2\mathrm{A}\mathrm{e}^{x} + 4\mathrm{A}x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{A}x^2\mathrm{e}^{x} \end{aligned}\right.$$

  On en déduit que $$y'' - 2y' + y = 2\mathrm{A}\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}$$

  d'où $$\mathrm{A} = \frac{1}{2}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\left\{x \mapsto (\mathrm{K}_1 x + \mathrm{K}_2)\mathrm{e}^{\,x} + \frac{\mathrm{e}^{\,-x}}{4} + \frac{x^2\mathrm{e}^{\,-x}}{2} \qquad (\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

> **Remarque**
> On cherche à résoudre une équation différentielle du second ordre (pas forcément à coefficients constants) de la forme
>
> $$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$
>
> Si on connaît une solution $y_1$ de l'équation homogène, alors en cherchant une solution de la forme
>
> $$x \mapsto y_1(x)z(x)$$
>
> on se ramène à une équation différentielle du premier ordre en $z'$. Ceci donne une autre méthode de résolution des équations différentielles de cet exercice, ainsi que celle de l'exercice suivant.

**1.5.2** On cherche à résoudre

$$y'' - 4y' + 3y = x\mathrm{e}^{\,2x}\cos x$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Cette équation est une équation différentielle d'ordre 2, à coefficients constants. Elle admet pour équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

Cette équation a pour racines 1 et $-3$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est

$$\left\{x \mapsto \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{\,-3x} \qquad (\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

On cherche maintenant une solution particulière de

$$y'' - 4y' + 3y = x\mathrm{e}^{\,2x}\cos x = \frac{x\mathrm{e}^{\,(2+\mathrm{i})x}}{2} + \frac{x\mathrm{e}^{\,(2-\mathrm{i})x}}{2}$$

On va successivement chercher des solutions particulières de

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{x\mathrm{e}^{\,(2+\mathrm{i})x}}{2}$$

puis de

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{x\mathrm{e}^{\,(2-\mathrm{i})x}}{2}$$

- **Solution de** $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{x\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}}{2}$

  $2+\mathrm{i}$ n'est pas racine de $r^2 - 4r + 3$. On cherche donc une solution de l'équation différentielle sous la forme $x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}$. On a alors

$$\begin{cases} y(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} \\ y'(x) = ((2+\mathrm{i})(\mathrm{A}x + \mathrm{B}) + \mathrm{A})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} \\ y''(x) = \Big((3+4\mathrm{i})\mathrm{A}x + (4+2\mathrm{i})\mathrm{A} + (3+4\mathrm{i})\mathrm{B}\Big)\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} \end{cases}$$

  On obtient ainsi

$$\begin{cases} -2\mathrm{A} = \dfrac{1}{2} \\ 2\mathrm{i}\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 0 \end{cases}$$

  soit

$$\begin{cases} \mathrm{A} = -\dfrac{1}{4} \\ \mathrm{B} = -\dfrac{\mathrm{i}}{4} \end{cases}$$

  On en déduit que

$$x \mapsto -\frac{x+\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}$$

  est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{x\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}}{2}$$

- **Solution de** $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{x\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}}{2}$

  Si $y_{\mathrm{S}_1}$ vérifie

$$y''_{\mathrm{S}_1} - 4y'_{\mathrm{S}_1} + 3y_{\mathrm{S}_1} = \frac{x\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}}{2}$$

  alors, en conjuguant l'équation, on obtient

$$\bar{y}''_{\mathrm{S}_1} - 4\bar{y}'_{\mathrm{S}_1} + 3\bar{y}_{\mathrm{S}_1} = \frac{x\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}}{2}$$

  On en déduit que

$$x \mapsto -\frac{x-\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}$$

  est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{x\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}}{2}$$

On en déduit qu'une solution particulière de l'équation homogène est

$$\begin{aligned} -\frac{x+\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} - \frac{x-\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} &= -\frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} - \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,(\sin x - x\cos x) \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \mathrm{K}_1 \mathrm{e}^{x} + \mathrm{K}_2 \mathrm{e}^{-3x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,(\sin x - x\cos x) \qquad (\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.}$$

**1.5.3** On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^{x}$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène

$$y'' - 2y' + y = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

qui a pour racine double 1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est donc

$$\left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{x} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

On cherche à présent une solution de l'équation différentielle avec second membre

$$y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^{x}$$

Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $y : x \mapsto \mathrm{A}x^2\mathrm{e}^{x}$. On a alors

$$\left\{\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{A}x^2\mathrm{e}^{x} \\ y'(x) &= (2\mathrm{A}x + \mathrm{A}x^2)\mathrm{e}^{x} \\ y''(x) &= (2\mathrm{A} + 4\mathrm{A}x + \mathrm{A}x^2)\mathrm{e}^{x} \end{aligned}\right.$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$y'' - 2y' + y = 2\mathrm{A}\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{x}$$

donc $\mathrm{A} = 1$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B} + x^2)\mathrm{e}^{x} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2\right\}.}$$

**1.5.4** On cherche à résoudre l'équation

$$y'' - 6y' + 9y = (3x^2 + 1)\mathrm{e}^{x}$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

qui a pour équation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

qui a pour racine double 3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est donc

$$\left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{3x} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

On cherche à présent une solution de l'équation différentielle avec second membre

$$y'' - 6y' + 9y = (3x^2 + 1)e^{3x}$$

Comme 3 est racine double de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme $y \; : x \mapsto (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x}$. On a alors

$$\begin{cases} y(x) = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x} \\ y'(x) = (3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx)e^{3x} \\ y''(x) = (9Ax^4 + (9B + 24A)x^3 + (9C + 18B + 12A)x^2 + (12C + 6B)x + 2C)e^{3x} \end{cases}$$

ce qui donne

$$y'' - 6y' + 9y = (12Ax^2 + 6Bx + 2C)e^{3x} = (3x^2 + 1)e^{3x}$$

d'où
$$A = \frac{1}{4} \qquad B = 0 \qquad C = \frac{1}{2}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\left\{ x \mapsto \left( Ax + B + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) e^{3x} \qquad (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

## Exercice 1.6

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$x^2y'' - 2y = x^4 \cos x$$

On commence par chercher des solutions de l'équation différentielle homogène

$$x^2y'' - 2y = 0$$

Comme suggéré par l'énoncé, cherchons des solutions sous la forme $x \mapsto x^\alpha$. On a ainsi

$$x^2\alpha(\alpha - 1)x^\alpha - 2x^\alpha = 0$$

d'où
$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

soit
$$\alpha = 2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -1$$

On en déduit que $s \mapsto 1/x$ et $x \mapsto x^2$ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène. Afin de trouver la solution de l'équation avec second membre, on va appliquer la méthode de variation de la constante. Pour cela, on commence par écrire le système linéaire d'ordre 1 associé à l'équation ; notons Y le vecteur $(y, y')$. Alors

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/x^2 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \cos x \end{pmatrix}$$

On cherche des solutions sous la forme

$$Y = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$$

où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des fonctions, et où $Y_1$ et $Y_2$ sont deux solutions du système homogène

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} \\ -\dfrac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

En injectant dans le système, on obtient

$$\lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \cos x \end{pmatrix}$$

soit
$$\begin{pmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x} \\ 2x & -\dfrac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \cos x \end{pmatrix}$$

On trouve alors, en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1' = \dfrac{x \cos x}{3} \\ \lambda_2' = -\dfrac{x^4 \cos x}{3} \end{cases}$$

Il reste à intégrer ces fonctions. Après quelques intégrations par parties, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{3}\,(x \sin x + \cos x) \\ \lambda_2 = -\dfrac{x^4 \sin x}{3} - \dfrac{4x^3 \cos x}{3} + 4x^2 \sin x + 8x \cos x - 8 \sin x \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto \left(\dfrac{1}{3}\,(x \sin x + \cos x) + A\right) x^2 \\ \quad + \left(-\dfrac{x^4 \sin x}{3} - \dfrac{4x^3 \cos x}{3} + 4x^2 \sin x + 8x \cos x + B\right) \dfrac{1}{x} \end{array} \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$$

## Exercice 1.7

Soit la fonction $u_n : (n, \theta) \mapsto r^n \cos(n\theta)$. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial r} &= n r^{n-1} \cos(n\theta) \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} &= n(n-1) r^{n-2} \cos(n\theta) \\ \frac{\partial u_n}{\partial \theta} &= -r^n \sin(n\theta) \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} &= -r^n \cos(n\theta) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} &= n(n-1)r^{n-2}\cos(n\theta) - r^{n-2}n^2\cos(n\theta) \\ &\quad + nr^{n-2}\cos(n\theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} = 0}$$

# INTÉGRATION

## Exercice 2.1

**2.1.1**
$$\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

**2.1.2**
$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

**2.1.3**
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = [\mathrm{Arctan}\,(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

**2.1.4**
$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [\mathrm{Arcsin}\ x]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{4}$$

**2.1.5**
$$\int_0^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \, [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/3} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| = \ln 2$$

**2.1.6**
$$\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = 1$$

**2.1.7**
$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_0^z = \frac{1}{2}\ln|2z-1|$$

**2.1.8**
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

**2.1.9**
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

## Exercice 2.2

**Rappel : Changement de variables dans une intégrale**
Soit $\varphi$ une fonction dérivable qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

**2.2.1** On cherche à calculer

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

Posons $t = \cos x$. Alors $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$. Par ailleurs

$$\begin{array}{lll} \text{si } x = 0 & \text{alors} & t = 1 \\ \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} & \text{alors} & t = 0 \end{array}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^2\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0$

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}}$

**2.2.2** On cherche à calculer

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3 + \cos x}$$

**Rappel : changement de variable en $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$**

Si $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Posons $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Alors $\mathrm{d}t = \dfrac{1 + \tan^2 \dfrac{x}{2}}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1+t^2}{2}\,\mathrm{d}x$. Par ailleurs

$$\begin{array}{lll} \text{si } x = 0 & \text{alors} & t = 0 \\ \text{si } x \to \pi & \text{alors} & t \to +\infty \end{array}$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{3+3t^2+1-t^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{4+2t^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \\
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$

$\boxed{\textbf{2.2.3}}$ On cherche à calculer
$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,\mathrm{d}x$$

Posons $t^2 = 2+4x$. Alors
$$2t\mathrm{d}t = 4\mathrm{d}x$$

Par ailleurs
$$\begin{array}{lll} \text{si } x=1 & \text{alors} & t=\sqrt{6} \\ \text{si } x=4 & \text{alors} & t=3\sqrt{2} \end{array}$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \frac{t^2-2}{8}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^3}{24} - \frac{2t}{8}\right]_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \\
&= \frac{54\sqrt{2}}{24} - \frac{6\sqrt{6}}{6} - \frac{6\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{6}}{8} \\
&= \frac{36\sqrt{2}}{24} \\
\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$\boxed{\textbf{2.2.4}}$ On cherche à calculer
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

Posons $x = \tan t$. Alors $\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t = (1+x^2)\mathrm{d}t$. Par ailleurs
$$\begin{array}{lll} \text{si } x=-1 & \text{alors} & t=-\dfrac{\pi}{4} \\ \text{si } x=1 & \text{alors} & t=\dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t}\\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 t\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}\\ \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}$$

**2.2.5** On cherche à calculer
$$\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$
Posons $t^2 = x-1$. Alors $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Par ailleurs
$$\begin{array}{lll}\text{si } x=1 & \text{alors} & t=0\\ \text{si } x=5 & \text{alors} & t=2\end{array}$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2\frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\left[t-\operatorname{Arctan} t\right]_0^2\\ \int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x &= 4-2\operatorname{Arctan}(2)\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = 4-2\operatorname{Arctan}(2)}$$

**2.2.6** On cherche à calculer
$$\int_{3/4}^{4/3}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$$

> **ERREUR !**
> On voit ici que l'intégrale va de 3/4 à 4/3, alors que l'intégrande comporte $\sqrt{x^2-1}$, qui n'est définie que pour $|x| \geqslant 1$. On va donc se contenter de calculer une primitive.

Posons $x = 1/t$. Alors $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. On en déduit que
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{Arcsin}(t)$$

Finalement $$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$\boxed{\textbf{2.2.7}}$ On cherche à calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Posons $t = \sin x$. Alors $\mathrm{d}t = -\cos x \mathrm{d}x$. Par ailleurs

$$\begin{array}{lll} \text{si } x = 0 & \text{alors} & t = 0 \\ \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} & \text{alors} & t = 1 \end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 5t + 6} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t-3)(t-2)} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\right]_0^1 \\
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \ln 2 - \ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

## Exercice 2.3

> **Rappel : Intégration par parties**
> Si $u$ et $v$ sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$, alors
> $$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

$\boxed{\textbf{2.3.1}}$ On cherche à calculer

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Intégrons par parties, en posant

$$\begin{array}{lll} u(x) = x^3 & \text{d'où} & u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \exp(-x) & \text{on choisit} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

On a alors

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^3\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 3x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 3\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Intégrons à nouveau par parties, en posant

$$\begin{array}{lll} u(x) = x^2 & \text{d'où} & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \exp(-x) & \text{on choisit} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

On a alors

$$\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 3\left(\left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{4}{\mathrm{e}} + 6\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Intégrons à nouveau par parties, en posant

$$\begin{array}{lll} u(x) = x & \text{d'où} & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & \text{on choisit} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

On a alors

$$\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{4}{\mathrm{e}} + 6\left(\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{4}{\mathrm{e}} + 6\left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1\right) = 6 - \frac{16}{\mathrm{e}}$$

Finalement $$\boxed{\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 6 - \frac{16}{\mathrm{e}}}$$

**2.3.2** On cherche à calculer

$$\int_0^\pi (x^2 - x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

Intégrons par parties, en posant

$$\begin{array}{lll} u(x) = x^2 - x & \text{d'où} & u'(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = \cos x & \text{on choisit} & v(x) = \sin x \end{array}$$

On a alors

$$\int_0^\pi (x^2 - x)\cos x\,\mathrm{d}x = \left[(x^2 - x)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x-1)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi (2x-1)\sin x\,\mathrm{d}x$$

Intégrons à nouveau par parties, en posant

$$\begin{array}{lll} u(x) = 2x - 1 & \text{d'où} & u'(x) = 2 \\ v'(x) = \sin x & \text{on choisit} & v(x) = -\cos x \end{array}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x^2 - x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -\left[-(2x-1)\cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= (1 - 2\pi) + 1 + 2\left[\sin x\right]_0^\pi \\ &= 2 - 2\pi \end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\int_0^{\pi} (x^2 - x)\cos x \, \mathrm{d}x = 2 - 2\pi}$$

$\boxed{\mathbf{2.3.3}}$ On cherche à calculer
$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$
Intégrons par parties, en posant
$$\begin{array}{lll} u(x) = \cos x & \text{d'où} & u'(x) = -\sin x \\ v'(x) = \cos x & \text{on choisit} & v(x) = \sin x \end{array}$$
On a alors
$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = [\sin x \cos x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x$$
On a ainsi trouvé que
$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$
Finalement
$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{2.3.4}}$ On cherche à calculer
$$\int_0^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$$
Intégrons par parties, en posant
$$\begin{array}{lll} u(x) = \ln x & \text{d'où} & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \text{on choisit} & v(x) = x \end{array}$$
On a alors
$$\int_0^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x = [x \ln x]_0^{\mathrm{e}} - \int_0^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x = \mathrm{e} - [x]_0^{\mathrm{e}} = 0$$
Finalement
$$\boxed{\int_0^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x = 0}$$

## Exercice 2.4

On note
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x$$
et on recherche une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_{n+2}$. L'intégrale $\mathrm{I}_{n+2}$ est égale à
$$\mathrm{I}_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x$$

Intégrons par parties, en posant

$$u(x) = x^{n+2} \qquad \text{d'où} \qquad u'(x) = (n+2)x^{n+1}$$

$$v'(x) = \sin(\pi x) \qquad \text{on choisit} \qquad v(x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}$$

On a alors

$$\mathrm{I}_{n+2} = \left[-\frac{x^{n+2}\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)\mathrm{d}x$$

Intégrons par parties, en posant

$$u(x) = x^{n+1} \qquad \text{d'où} \qquad u'(x) = (n+1)x^{n}$$

$$v'(x) = \cos(\pi x) \qquad \text{on choisit} \qquad v(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

On a alors

$$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(\pi x)x^{n+1}}{\pi}\right]_0^1 - \frac{n+1}{\pi}\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+2)(n+1)}{\pi^2}\,\mathrm{I}_n}$$

## EXERCICE 2.5

**Rappel : décomposition en éléments simples**
Soient P et Q deux polynômes tels que $d^\circ \mathrm{P} < d^\circ \mathrm{Q}$.

- Si $(\mathrm{X}-\alpha)^n | \mathrm{Q}(\mathrm{X})$ et $(\mathrm{X}-\alpha)^{n+1} \nmid \mathrm{Q}(\mathrm{X})$, on a

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{\widetilde{\mathrm{P}}(x)}{\widetilde{\mathrm{Q}}(x)}$$

  où $\mathrm{X}-\alpha$ ne divise pas $\widetilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{X})$
- Si $(\mathrm{X}^2+\alpha\mathrm{X}+\beta)^n | \mathrm{Q}(\mathrm{X})$ et $(\mathrm{X}^2+\alpha\mathrm{X}+\beta)^{n+1} \nmid \mathrm{Q}(\mathrm{X})$, où $\mathrm{X}^2+\alpha\mathrm{X}+\beta$ est un polynôme irréductible (c'est à dire que $\alpha^2 - 4\beta < 0$), on a

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_1 x + b_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \cdots + \frac{a_n x + b_n}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} + \frac{\widetilde{\mathrm{P}}(x)}{\widetilde{\mathrm{Q}}(x)}$$

  où $\mathrm{X}^2+\alpha\mathrm{X}+\beta$ ne divise pas $\bar{\mathrm{Q}}$.

**2.5.1** On cherche à calculer

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Afin de calculer cette intégrale, nous allons décomposer la fraction rationnelle en éléments simples

$$\exists(\mathrm{A},\mathrm{B}) \qquad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}}{x+1}$$

En multipliant les deux membre de l'égalité par $(x-1)$, puis en évaluant en $x=1$, on obtient

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}$$

En multipliant les deux membre de l'égalité par $(x+1)$, puis en évaluant en $x=-1$, on obtient

$$\mathrm{B} = -\frac{1}{2}$$

soit

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Il vient alors, en calculant une primitive de chacun des éléments simples

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{\sqrt{2}/2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{4-2} \\
\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})}$$

**2.5.2** On cherche à calculer

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Afin de calculer cette intégrale, nous allons décomposer la fraction rationnelle en éléments simples

$$\exists(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \qquad \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}}{x-2} + \frac{\mathrm{C}}{(x-2)^2}$$

En multipliant les deux membre de l'égalité par $(x-1)$, puis en évaluant en $x=1$, on obtient

$$\mathrm{A} = 2$$

En multipliant les deux membre de l'égalité par $(x-2)^2$, puis en évaluant en $x=2$, on obtient

$$\mathrm{C} = 3$$

Enfin, en multipliant par $x$ chacun des membres et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=0 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{B}=-2$$

Il vient alors, en calculant une primitive de chacun des éléments simples

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{3}{x-2}\right]_{-1}^{0} \\
&= -2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \\
\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= -4\ln 2 + 2\ln 3 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -4\ln 2 + 2\ln 3 + \frac{1}{2}}$$

**2.5.3** On cherche à calculer

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Dans cette fraction rationnelle, faisons apparaître la dérivée de $x \mapsto x^2+x+1$ au numérateur

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+x+1)\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+x+1)\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{Arctan}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{\ln 3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

**2.5.4** On cherche à calculer

$$\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$$

Cette fraction rationnelle est déjà décomposée en éléments simples dans $\mathbb{R}$, car le polynôme au dénominateur est irréductible dans $\mathbb{R}$. On peut récrire cette intégrale comme suit

$$\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\left((x+1)^2+1\right)^2}$$

et comme on l'a vu à l'exercice 2.3, question 4, il suffit de chercher un changement de variable en tan. Posons donc

$$x+1 = \tan t$$

d'où
$$\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$$

Par ailleurs
$$\begin{array}{lll} \text{si } x = 0 & \text{alors} & t = \dfrac{\pi}{4} \\ \text{si } x = \mathrm{e} & \text{alors} & t = \operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e}) \end{array}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} &= \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})} \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t} \\
&= \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})} \\
&= \frac{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})} \\
\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} &= \frac{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\sin(2\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})) - 1}{4}
\end{aligned}$$

Enfin, on sait que
$$\sin(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

On en déduit que
$$\sin(2\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})) = \frac{2(1+\mathrm{e})}{1+(1+\mathrm{e})^2}$$

Finalement

$$\boxed{\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\operatorname{Arctan}(1+\mathrm{e})}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\mathrm{e}^2}{4(2+2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)}}$$

# CALCUL MATRICIEL

## Exercice 3.1

> **Rappel : familles libres, familles liées**
> On dit qu'une famille $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3, \dots, \overrightarrow{V}_k)$ est *libre* si
>
> $$\lambda_1 \overrightarrow{V}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{V}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{V}_3 + \dots \lambda_k \overrightarrow{V}_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$
>
> On dit qu'une famille $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3, \dots, \overrightarrow{V}_k)$ est *liée* si elle n'est pas libre, c'est à dire
>
> $$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ tel que } \lambda_1 \overrightarrow{V}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{V}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{V}_3 + \dots \lambda_k \overrightarrow{V}_k = 0$$
>
> En pratique, pour déterminer si une famille est libre ou liée, on pose le système
>
> $$\lambda_1 \overrightarrow{V}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{V}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{V}_3 + \dots \lambda_k \overrightarrow{V}_k = 0$$
>
> et on le résout. Si le système admet une seule solution, alors la famille est libre, alors que si le système admet plusieurs solutions, la famille est liée.

**3.1.1** On cherche à savoir si la famille

$$(2, 3, 0, 5) \quad (0, 1, 0, 4) \quad (1, 1, 0, 2)$$

est libre ou liée. Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ tels que

$$\lambda_1(2, 3, 0, 5) + \lambda_2(0, 1, 0, 4) + \lambda_3(1, 1, 0, 2) = 0$$

En écrivant la dernière égalité coordonnée par coordonnée, on obtient le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \begin{cases} 2\lambda_1 & + & & & \lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ 5\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

On a alors les équivalences suivantes

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 & + & & \lambda_3 = 0 & \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & = 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 & + & & \lambda_3 = 0 & \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & = 0 & \\ -11\lambda_1 & & & = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 4\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

Alors, nécessairement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille est donc libre.}}$$

$\boxed{\textbf{3.1.2}}$ On cherche à savoir si la famille

$$(-5, 2, 8, -16) \quad (-5, 3, 17, -14) \quad (1, 1, 11, 6)$$

est libre ou liée. Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ tels que

$$\lambda_1(-5, 2, 8, -16) + \lambda_2(-5, 3, 17, -14) + \lambda_3(1, 1, 11, 6) = 0$$

En écrivant la dernière égalité coordonnée par coordonnée, on obtient le système

$$(\mathbf{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -5\lambda_1 & - & 5\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ 8\lambda_1 & + & 17\lambda_2 & + & 11\lambda_3 & = 0 \\ -16\lambda_1 & - & 14\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrll} -5\lambda_1 & - & 5\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 & \\ 7\lambda_1 & + & 8\lambda_2 & & & = 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ 63\lambda_1 & + & 72\lambda_2 & & & = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 11\mathrm{L}_1 \\ 14\lambda_1 & + & 16\lambda_2 & & & = 0 & \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 6\mathrm{L}_1 \end{array} \right.$$

On remarque que la troisième ligne est égale à 9 fois la deuxième, tandis que la quatrième est égale à 2 fois la deuxième. On peut donc supprimer ces deux lignes, d'où

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -5\lambda_1 & - & 5\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ 7\lambda_1 & + & 8\lambda_2 & & & = 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = \dfrac{\lambda_3}{5} \\ 7\lambda_1 & + & 8\lambda_2 & = 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrll} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = \dfrac{\lambda_3}{5} & \\ & & \lambda_2 & = -\dfrac{7\lambda_3}{5} & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 7\mathrm{L}_1 \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{8\lambda_3}{5} \\ \lambda_2 = -\dfrac{7\lambda_3}{5} \end{array} \right.$$

Le système admet donc une droite de solutions, ce qui veut dire que

$$\boxed{\text{La famille est liée.}}$$

$\boxed{\textbf{3.1.3}}$ On cherche à savoir si la famille

$$(0, 1, 2, -1) \quad (1, 2, -1, 0) \quad (0, 2, -1, 1) \quad (4, 6, 1, 3)$$

est libre ou liée. Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda_4$ tels que

$$\lambda_1(0, 1, 2, -1) + \lambda_2(1, 2, -1, 0) + \lambda_3(0, 2, -1, 1) + \lambda_4(4, 6, 1, 3) = 0$$

En écrivant la dernière égalité coordonnée par coordonnée, on obtient le système

$$(\mathbf{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} & & \lambda_2 & & & + & 4\lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = 0 \\ -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = 0 \end{array} \right.$$

On a alors les équivalences suivantes

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 & \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 & \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \\ -\lambda_1 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 & \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 & \\ \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 & \\ -5\lambda_2 - 5\lambda_3 - 11\lambda_4 = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 9\lambda_4 = 0 & \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_1 \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 & \\ \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 & \\ -5\lambda_3 + 9\lambda_4 = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 5\mathrm{L}_2 \\ 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 2\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 & \\ \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 & \\ -32\lambda_3 = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 9\mathrm{L}_4 \\ 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, donc que

$$\boxed{\text{La famille est libre.}}$$

## Exercice 3.2

**Rappel : changement de base**
Notons $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \dots, \mathrm{V}_n$ les vecteurs colonnes d'une base $\mathrm{B}'$ exprimés dans la base canonique. Soit $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathrm{X}'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ dans $\mathrm{B}'$. Notons $\mathrm{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ dans la base canonique. Alors

$$\mathrm{X} = x'_1\mathrm{V}_1 + x'_2\mathrm{V}_2 + \cdots + x'_n\mathrm{V}_n$$

soit
$$\mathrm{X} = (\mathrm{V}_1|\mathrm{V}_2|\dots|\mathrm{V}_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathrm{PX}'$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, e_2, e_3)$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Afin de déterminer les coordonnées de $(5,-1,3)$ dans la base $(e_1,e_2,e_3)$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma})\left\{\begin{array}{ccccl}\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 = 5\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 = -1\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 = 3\end{array}\right.$$

On a alors les équivalences suivantes

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl}\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 = 5 & \\ & & & & \lambda_3 = -6 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1\\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 = -2 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1\end{array}\right.$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 10\\ \lambda_3 = -6\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le vecteur } (5,-1,3) \text{ admet } (1,10,-6) \text{ pour}\\ \text{coordonnées dans la base } (e_1,e_2,e_3).\end{array}}$$

Afin de déterminer les coordonnées de $(2,3,-1)$ dans la base $(e_1,e_2,e_3)$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma})\left\{\begin{array}{ccccl}\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 = 2\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 = 3\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 = -1\end{array}\right.$$

On a alors les équivalences suivantes

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl}\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 = 2 & \\ & & & & \lambda_3 = 1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1\\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 = -3 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1\end{array}\right.$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = 6\\ \lambda_2 = -5\\ \lambda_3 = 1\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le vecteur } (2,3,-1) \text{ admet } (6,-5,-1) \text{ pour}\\ \text{coordonnées dans la base } (e_1,e_2,e_3).\end{array}}$$

## Exercice 3.3

**Rappel : Produit matriciel**
Soient deux matrices A et B. Notons $n_{\mathrm{A}}$ et $n_{\mathrm{B}}$ le nombre de lignes respectif de A et de B, et $p_{\mathrm{A}}$ et $p_{\mathrm{B}}$ le nombre de colonnes. Alors le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est défini si et seulement si $p_{\mathrm{A}} = n_{\mathrm{B}}$. On a alors

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B})_{i,j} = \sum_{k=1}^{p_{\mathrm{A}}} \mathrm{A}_{i,k}\mathrm{B}_{k,j}$$

D'une manière générale, le produit de deux matrices n'est pas *commutatif* : si le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est défini, $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$ n'est pas forcément défini, et même lorsqu'il est défini, on a en général $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

**Rappel : Associativité**
on dit qu'une opération $*$ est *associative* si

$$\forall a, b, c \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$$

On peut alors noter ce produit sans parenthèse : $a * b * c$.

Notons A, B et C les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 17 & -6 & -8 \\ 44 & -24 & -23 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 39 & -11 \end{pmatrix}$$

Et finalement

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C} = \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = \begin{pmatrix} 73 & -25 \\ 175 & -67 \end{pmatrix}$$

## Exercice 3.4

**Méthode de calcul d'un déterminant**
D'une manière générale, pour calculer un déterminant, on conseille de faire apparaître un maximum de 0 sur une ligne ou une colonne à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes, puis de développer par rapport à cette ligne ou cette colonne.
Par ailleurs, on rappelle que la règle de Sarrus ne fonctionne qu'en dimension 3.

$\boxed{\textbf{3.4.1}}$ On cherche à calculer le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4$$

$$\boxed{\Delta_1 = 4}$$

$\boxed{\textbf{3.4.2}}$ On cherche à calculer le déterminant suivant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

$$\boxed{\Delta_2 = 1}$$

**3.4.3** On cherche à calculer le déterminant suivant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_1 \end{array}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = -16$$

$$\boxed{\Delta_3 = -16}$$

## Exercice 3.5

**Méthode d'inversion d'une matrice**
On peut inverser une matrice d'au moins deux manières

1. **En résolvant un système linéaire** $n \times n$**.**
   Notons $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur X, et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un vecteur Y. On résout le système
   $$\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$$
   en X (c'est à dire qu'on suppose connu Y, et qu'on cherche à exprimer

chacun des $x_i$ en fonction des $y_i$). Alors à la fin de la résolution du système linéaire, on obtient une relation linéaire de la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{BY}$$

La matrice B est l'inverse de la matrice A.

2. **En utilisant la comatrice**

On a la formule $$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\ {}^t\mathrm{comA}$$

où comA est la comatrice de A, c'est à dire la matrice de ses cofacteurs. Les *cofacteurs* $\mathrm{C}_{i,j}$ de A sont, au signe près, les *mineurs* $\Delta_{i,j}$ de A :

$$\mathrm{C}_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Le mineur $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice A à laquelle on a ôté la ligne $i$ et la colonne $j$.

D'un point de vue informatique, *aucun* algorithme n'implémente la méthode avec les cofacteurs, car elle est trop coûteuse en calculs. En pratique, elle n'est efficace qu'avec les matrices $3 \times 3$. Pour les dimensions supérieurs, on n'utilisera que la méthode consistant à résoudre un système linéaire.

**3.5.1** Nous voulons inverser la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour cela, nous allons inverser le système suivant

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & & & = y_1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = y_2 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = y_3 \end{array} \right.$$

On a alors

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & & & = y_1 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & - & x_3 & = y_2 + \frac{1}{2}\,y_1 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_3 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = y_3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & & & = y_1 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & - & x_3 & = y_2 + \frac{1}{2}\,y_1 \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_3 \\ & & & & \frac{4}{3}\,x_3 & = y_3 + \frac{2}{3}\,y_2 + \frac{1}{3}\,y_1 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \frac{2}{3}\,\mathrm{L}_2 \end{array} \right.$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4}\,y_1 + \frac{1}{2}\,y_2 + \frac{1}{4}\,y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}\,y_1 + y_2 + \frac{1}{2}\,y_3 \\ x_3 = \frac{1}{4}\,y_1 + \frac{1}{2}\,y_2 + \frac{3}{4}\,y_3 \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$

**3.5.2** Nous voulons inverser la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour cela, nous allons inverser le système suivant

$$(\mathbf{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 = y_1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 = y_2 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 = y_3 \end{array} \right.$$

On a alors

$$(\mathbf{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcll} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 = y_1 & \\ & & & - & 4x_3 = y_2 - 2y_1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 = y_3 & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{4}\, y_1 + \frac{3}{8}\, y_2 - \frac{1}{2}\, y_3 \\ x_2 = -\frac{3}{4}\, y_1 + \frac{3}{8}\, y_2 + \frac{1}{2}\, y_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}\, y_1 - \frac{1}{4}\, y_2 \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}$$

## Exercice 3.6

**Rappel : inverse d'une matrice** $2 \times 2$

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a pour inverse $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

**3.6.1** Tenant compte du fait que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}$$

**3.6.2** Tenant compte du fait que $\mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1$, on obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ t & \mathrm{sh}\ t \\ \mathrm{sh}\ t & \mathrm{ch}\ t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ t & -\mathrm{sh}\ t \\ -\mathrm{sh}\ t & \mathrm{ch}\ t \end{pmatrix}}$$

**3.6.3** Tenant compte du fait que $\mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1$, on obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{sh}\ t & \mathrm{ch}\ t \\ \mathrm{ch}\ t & \mathrm{sh}\ t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sh}\ t & \mathrm{ch}\ t \\ \mathrm{ch}\ t & -\mathrm{sh}\ t \end{pmatrix}}$$

## EXERCICE 3.7

**Rappel : Valeur propre/Vecteur propre**
On appelle *valeur propre* un complexe $\lambda$ tel que

$$\exists \mathrm{X} \neq 0 \qquad \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$$

Dans ce cas, X est appelé un *vecteur propre.*
Les valeurs propres sont les $\lambda$ tels que $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ n'est pas inversible. On en déduit que $\lambda$ est une valeur propre, si et seulement si

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$$

Le polynôme $\mathrm{P}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ est appelé *polynôme caractéristique.*
Dans la pratique, on commence par calculer le polynôme caractéristique, et on calcule ses racines, ce qui donne les valeurs propres. Les vecteurs propres sont obtenus en résolvant le système

$$(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0$$

où $\lambda$ est une valeur propre.

**3.7.1** On recherche les éléments propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de cette matrice

$$\begin{aligned}
\chi(\mathrm{X}) &= \begin{vmatrix} 2-\mathrm{X} & 0 & 4 \\ 3 & -4-\mathrm{X} & 12 \\ 1 & -2 & 5-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\
&= (2-\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -4-\mathrm{X} & 12 \\ -2 & 5-\mathrm{X} \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -4-\mathrm{X} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (2-\mathrm{X})\left((\mathrm{X}+4)(\mathrm{X}-5)+24\right) + 4\left(-6+\mathrm{X}+4\right) \\
&= (2-\mathrm{X})\left(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 4 - 4\right) \\
&= \mathrm{X}(2-\mathrm{X})(\mathrm{X}-1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{Les valeurs propres de la matrice sont } 0, 1, 2}$

Déterminons à présent les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres

- **Espace propre associé à** 0
  Afin de déterminer l'espace propre associé à 0, résolvons le système

$$(\mathbf{\Sigma})\begin{cases} 2x_1 & & & + & 4x_3 = 0 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 12x_3 = 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 = 0 \end{cases}$$

On a l'équivalence suivante

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \begin{cases} 2x_1 & & & + & 4x_3 = 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 = 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 = 0 \end{cases}$$

La première et la deuxième ligne sont les mêmes, donc

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 = 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 = 0 \end{cases}$$

c'est à dire que

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\boxed{(-4, 3, 2) \text{ est un vecteur propre associé à } 0}$$

- **Espace propre associé à** 1
  Afin de déterminer l'espace propre associé à 1, résolvons le système

$$(\mathbf{\Sigma})\begin{cases} x_1 & & & + & 4x_3 = 0 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 12x_3 = 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 = 0 \end{cases}$$

On a l'équivalence suivante

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \begin{cases} x_1 & & & + & 4x_3 = 0 \\ x_1 & - & 5x_2 & & = 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1 \\ & - & 2x_2 & & = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{cases}$$

c'est à dire que

$$(\mathbf{\Sigma}) \iff \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(-4, 0, 1) \text{ est un vecteur propre associé à } 1.}$$

- **Espace propre associé à** 2
  Afin de déterminer l'espace propre associé à 2, résolvons le système

$$(\mathbf{\Sigma})\begin{cases} & & & + & 4x_3 = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 12x_3 = 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 = 0 \end{cases}$$

c'est à dire que

$$(\mathbf{\Sigma}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(2,1,0) \text{ est un vecteur propre associé à } 2.}$$

La matrice de passage est égale à

$$\boxed{\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Il reste à inverser cette matrice. Pour cela, on va résoudre le système linéaire

$$(\mathbf{\Sigma}) \begin{cases} 4x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 = y_1 \\ 3x_1 & & & + & x_3 = y_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & & = y_3 \end{cases}$$

On a alors les équivalences suivantes

$$(\mathbf{\Sigma}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 = y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & = y_2 - \frac{1}{2}\,y_1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & = y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 = y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & = y_2 - \frac{1}{2}\,y_1 \\ & - & 3x_2 & & = y_3 - 2y_2 + y_1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$(\mathbf{\Sigma}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}\,y_1 - \frac{1}{3}\,y_2 + \frac{2}{3}\,y_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}\,y_1 + \frac{2}{3}\,y_2 - \frac{1}{3}\,y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}\,y_1 + 2\,y_2 - 2\,y_3 \end{cases}$$

soit

$$\boxed{\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

**3.7.2** On recherche les éléments propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de cette matrice

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{X}) &= \begin{vmatrix} 1-\mathrm{X} & 4 & 2 \\ 0 & -3-\mathrm{X} & -2 \\ 0 & 4 & 3-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\ &= (1-\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -3-\mathrm{X} & -2 \\ 4 & 3-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\ &= (1-\mathrm{X})\left(\mathrm{X}^2-9+8\right) \\ &= -(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{Les valeurs propres de la matrice sont } -1 \text{ et } 1.}$

Déterminons à présent les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres

- **Espace propre associé à** $-1$
  Afin de déterminer l'espace propre associé à $-1$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & =0 \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & =0 \\ & & 4x_2 & + & 4x_3 & =0 \end{array} \right.$$

  Le système $(\boldsymbol{\Sigma})$ est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} x_1 & + & x_2 & =0 \\ x_2 & + & x_3 & =0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{(1,-1,1) \text{ est un vecteur propre associé à } 2.}$$

- **Espace propre associé à** $1$
  Afin de déterminer l'espace propre associé à $-1$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rrcrl} & 4x_2 & + & 2x_3 & =0 \\ - & 4x_2 & - & 2x_3 & =0 \\ & 4x_2 & + & 2x_3 & =0 \end{array} \right.$$

  Ce système est équivalent à

$$2x_2 + x_3 = 0$$

  On en déduit que

$$\boxed{(1,0,0) \text{ et } (0,2,-1) \text{ sont deux vecteurs propres associés à } 1.}$$

On en déduit la matrice de passage suivante

$$\boxed{\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Il reste à inverser cette matrice. Pour cela, on va résoudre le système linéaire

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rrcrl} x_1 & & + & x_3 & = y_1 \\ & 2x_2 & - & x_3 & = y_2 \\ - & x_2 & + & x_3 & = y_3 \end{array} \right.$$

On a alors les équivalences suivantes

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} x_1 & & + & x_3 = y_1 & \\ & x_2 & & = y_2 + y_3 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \\ - & x_2 & + & x_3 = y_3 & \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 + 2y_3 \end{array}\right.$$

soit

$$\boxed{\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

**3.7.3** On recherche les éléments propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de cette matrice

$$\begin{aligned} \chi(\mathrm{X}) &= \begin{vmatrix} -2-\mathrm{X} & -2 & 1 \\ -2 & 1-\mathrm{X} & -2 \\ 1 & 1 & -2-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\ &= -(\mathrm{X}+2) \begin{vmatrix} 1-\mathrm{X} & -2 \\ 1 & -2-\mathrm{X} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2-\mathrm{X} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1-\mathrm{X} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\mathrm{X}+2)((\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)+2) + 2(2(\mathrm{X}+2)+2) - 2 + \mathrm{X} - 1 \\ &= -(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}) + 5\mathrm{X} + 9 \\ \chi(\mathrm{X}) &= -\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 9 \end{aligned}$$

$-3$ est racine évidente du polynôme. Le polynôme se factorise alors sous la forme

$$\chi(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}^2-3)$$

On en déduit que $\boxed{\text{Les valeurs propres sont } -3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}.}$

Déterminons à présent les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres

- **Espace propre associé à** $-3$

  Afin de déterminer l'espace propre associé à $-3$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{\begin{array}{ccccccl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

  Le système $(\boldsymbol{\Sigma})$ est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 = 0 & \\ & & & & 0 = 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1 \\ & & 3x_2 & & = 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

  On en déduit que

$$\boxed{(1, 0, -1) \text{ est un vecteur propre associé à } -3.}$$

- **Espace propre associé à** $\sqrt{3}$
  Afin de déterminer l'espace propre associé à $\sqrt{3}$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma})\left\{\begin{array}{ccccccc} -(2+\sqrt{3})x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & =0 \\ -2x_1 & + & (1-\sqrt{3})x_2 & - & 2x_3 & =0 \\ x_1 & + & x_2 & - & (2+\sqrt{3})x_3 & =0 \end{array}\right.$$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{array}{rl} \Sigma \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccl} -x_1 & - & 2(2-\sqrt{3})x_2 & + & (2-\sqrt{3})x_3 & =0 & \mathrm{L}_1 \leftarrow (2-\sqrt{3})\mathrm{L}_1 \\ -2x_1 & + & (1-\sqrt{3})x_2 & - & 2x_3 & =0 & \\ x_1 & + & x_2 & - & (2+\sqrt{3})x_3 & =0 & \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccl} -x_1 & - & 2(2-\sqrt{3})x_2 & + & (2-\sqrt{3})x_3 & =0 & \\ & & (9-5\sqrt{3})x_2 & + & (-6+2\sqrt{3})x_3 & =0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & & (-3+2\sqrt{3})x_2 & - & 2\sqrt{3}x_3 & =0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \end{array}\right. \end{array}$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles (ça ne se voit pas forcément, mais le déterminant des deux dernières lignes est nul). On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{2}\,x_2 \\ x_3 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) x_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2}, 1, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ est un vecteur propre associé à } \sqrt{3}.}$$

- **Espace propre associé à** $-\sqrt{3}$
  Afin de déterminer l'espace propre associé à $-\sqrt{3}$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma})\left\{\begin{array}{ccccccc} -(2-\sqrt{3})x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & =0 \\ -2x_1 & + & (1+\sqrt{3})x_2 & - & 2x_3 & =0 \\ x_1 & + & x_2 & - & (2-\sqrt{3})x_3 & =0 \end{array}\right.$$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{array}{rl} \Sigma \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccl} -x_1 & - & 2(2+\sqrt{3})x_2 & + & (2+\sqrt{3})x_3 & =0 & \mathrm{L}_1 \leftarrow (2+\sqrt{3})\mathrm{L}_1 \\ -2x_1 & + & (1+\sqrt{3})x_2 & - & 2x_3 & =0 & \\ x_1 & + & x_2 & - & (2-\sqrt{3})x_3 & =0 & \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccl} -x_1 & - & 2(2+\sqrt{3})x_2 & + & (2+\sqrt{3})x_3 & =0 & \\ & & (9+5\sqrt{3})x_2 & + & (-6-2\sqrt{3})x_3 & =0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & & (-3-2\sqrt{3})x_2 & + & 2\sqrt{3}x_3 & =0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \end{array}\right. \end{array}$$

Les deux dernières lignes sont proportionelles (ça ne se voit pas forcément, mais le déterminant des deux dernières lignes est nul). On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{2}\,x_2 \\ x_3 = \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) x_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2}, 1, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ est un vecteur propre associé à } -\sqrt{3}.}$$

On peut donc choisir, comme matrice de passage

$$\boxed{\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}$$

Il reste à inverser la matrice de passage P. Pour cela, on va résoudre le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = y_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = y_2 \\ -x_1 & + & \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x_2 & + & \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x_3 & = y_3 \end{array} \right.$$

On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Sigma}) &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = y_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = y_2 \\ & & \frac{1-\sqrt{3}}{2}x_2 & + & \frac{1+\sqrt{3}}{2}x_3 & = y_3 + y_1 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = y_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = y_2 \\ & - & x_2 & + & (2+\sqrt{3})x_3 & = (1+\sqrt{3})(y_3+y_1) \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow (1+\sqrt{3})\mathrm{L}_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = y_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = y_2 \\ & & & & (3+\sqrt{3})x_3 & = (1+\sqrt{3})(y_3+y_1) + y_2 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3 \end{array} \right.$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\textbf{3.7.4}}$ On recherche les éléments propres de

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de cette matrice

$$\begin{aligned}
\chi(\mathrm{X}) &= \begin{vmatrix} 2-\mathrm{X} & -2 & 1 \\ 1 & 3-\mathrm{X} & 1 \\ 0 & 1 & 2-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\
&= (2-\mathrm{X}) \begin{vmatrix} 3-\mathrm{X} & 1 \\ 1 & 2-\mathrm{X} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\
&= (2-\mathrm{X})\left((\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-2)-1\right) - 2(\mathrm{X}-2)+1 \\
&= -(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-2)^2 + (\mathrm{X}-2) - 2(\mathrm{X}-2) + 1 \\
&= -(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-2)^2 + (3-\mathrm{X}) \\
&= -(\mathrm{X}-3)((\mathrm{X}-2)^2+1) \\
\chi(\mathrm{X}) &= -(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+5)
\end{aligned}$$

3 est valeur propre de la matrice. Les autres valeurs propres $\lambda$ vérifient

$$(\lambda-2)^2+1=0$$

donc

$$\lambda = 2 \pm \mathrm{i}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres sont } 3,\ 2+\mathrm{i} \text{ et } 2-\mathrm{i}.}$$

Déterminons à présent les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres

- **Espace propre associé à** $3$

  Afin de déterminer l'espace propre associé à 3, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

  Le système $(\boldsymbol{\Sigma})$ est équivalent à

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = 0 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

  On en déduit que

$$\boxed{(-1,1,1) \text{ est un vecteur propre associé à } 3.}$$

- **Espace propre associé à** $2+\mathrm{i}$

  Afin de déterminer l'espace propre associé à $2+\mathrm{i}$, résolvons le système

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -\mathrm{i}x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & + & (1-\mathrm{i})x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & - & \mathrm{i}x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

  Le système $(\boldsymbol{\Sigma})$ est équivalent à

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\Sigma}) &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -\mathrm{i}x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & (1+\mathrm{i})x_2 & + & (1-\mathrm{i})x_3 & = 0 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{i}\mathrm{L}_1 \\ & & x_2 & - & \mathrm{i}x_3 & = 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -(2+\mathrm{i})x_3 \\ x_2 = \mathrm{i}x_3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

  On en déduit que

$$\boxed{(-(2+\mathrm{i}),\mathrm{i},1) \text{ est un vecteur propre associé à } 2+\mathrm{i}.}$$

- **Espace propre associé à** $2-\mathrm{i}$

  Si A est une matrice réelle, $\lambda$ une valeur propre complexe de A et V un vecteur propre associé à $\lambda$, alors
$$\mathrm{AV} = \lambda \mathrm{V}$$
  En conjuguant, il vient $\quad \mathrm{A}\bar{\mathrm{V}} = \bar{\lambda}\bar{\mathrm{V}}$

  On en déduit que $\bar{\lambda}$ admet $\bar{\mathrm{V}}$ comme vecteur propre. Ainsi
$$\boxed{(-(2-\mathrm{i}), -\mathrm{i}, 1) \text{ est un vecteur propre associé à } 2-\mathrm{i}.}$$

On en déduit que $\quad \boxed{\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & -(2+\mathrm{i}) & -(2-\mathrm{i}) \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Il reste à inverser la matrice P. Pour cela, on résout le système
$$(\mathbf{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -x_1 & - & (2+\mathrm{i})x_2 & - & (2-\mathrm{i})x_3 & = y_1 \\ x_1 & + & \mathrm{i}x_2 & - & \mathrm{i}x_3 & = y_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = y_3 \end{array} \right.$$

On a alors les équivalences suivantes
$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Sigma}) \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrll} -x_1 & - & (2+\mathrm{i})x_2 & - & (2-\mathrm{i})x_3 & = y_1 & \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = y_2 + y_1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ & - & (1+\mathrm{i})x_2 & - & (1-\mathrm{i})x_3 & = y_3 + y_1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrll} -x_1 & - & (2+\mathrm{i})x_2 & - & (2-\mathrm{i})x_3 & = y_1 & \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = y_2 + y_1 & \\ & & & & 2\mathrm{i}x_3 & = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,y_1 - \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,y_2 + y_3 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{L}_2 \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{2}\,y_1 + \dfrac{1}{2}\,y_2 + y_3 \\ x_2 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{4}\,y_1 - \dfrac{1+\mathrm{i}}{4}\,y_2 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\,y_3 \\ x_3 = -\dfrac{1+\mathrm{i}}{4}\,y_1 - \dfrac{1-\mathrm{i}}{4}\,y_2 - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\,y_3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Finalement $\quad \boxed{\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ \dfrac{-1+\mathrm{i}}{4} & -\dfrac{1+\mathrm{i}}{4} & \dfrac{\mathrm{i}}{2} \\ -\dfrac{1+\mathrm{i}}{4} & -\dfrac{1-\mathrm{i}}{4} & -\dfrac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}}$

## Exercice 3.8

Afin de résoudre ce système linéaire, on va utiliser le pivot de Gauss
$$(\mathbf{\Sigma}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & + & t & = 3 \\ x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & = 2 \\ 2x & + & 9y & + & 8z & + & 3t & = 7 \\ 3x & + & 7y & + & 7z & + & 2t & = 12 \\ 5x & + & 7y & + & 7z & + & 2t & = 20 \end{array} \right.$$

On a alors le équivalences suivantes

$$
(\boldsymbol{\Sigma}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & 3z & + & t & = 3 \quad \mathrm{L}_1 \\
 & & 2y & + & 2z & + & t & = -1 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\
 & & 5y & + & 2z & + & t & = 1 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\
 & & y & - & 2z & - & t & = 3 \quad \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 3\mathrm{L}_1 \\
 & - & 3y & - & 8z & - & 3t & = 5 \quad \mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 - 5\mathrm{L}_1
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & 3z & + & t & = 3 \quad \mathrm{L}_1 \\
 & & y & - & 2z & - & t & = 3 \quad \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_4 \\
 & & 5y & + & 2z & + & t & = 1 \quad \mathrm{L}_3 \\
 & & 2y & + & 2z & + & t & = -1 \quad \mathrm{L}_4 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\
 & - & 3y & - & 8z & - & 3t & = 5 \quad \mathrm{L}_5
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & 3z & + & t & = 3 \quad \mathrm{L}_1 \\
 & & y & - & 2z & - & t & = 3 \quad \mathrm{L}_2 \\
 & & & & 6z & + & 3t & = -7 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\
 & & & & 12z & + & 6t & = -14 \quad \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 5\mathrm{L}_1 \\
 & & & - & 14z & - & 6t & = 14 \quad \mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 + 3\mathrm{L}_1
\end{array}\right.
$$

On peut éliminer la quatrième ligne, qui est proportionnelle à la troisième ligne. Ainsi

$$
(\boldsymbol{\Sigma}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & 3z & + & t & = 3 \quad \mathrm{L}_1 \\
 & & y & - & 2z & - & t & = 3 \quad \mathrm{L}_2 \\
 & & & & 6z & + & 3t & = -7 \quad \mathrm{L}_3 \\
 & & & - & 14z & - & 6t & = 14 \quad \mathrm{L}_4
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & 3z & + & t & = 3 \quad \mathrm{L}_1 \\
 & & y & - & 2z & - & t & = 3 \quad \mathrm{L}_2 \\
 & & & & 6z & + & 3t & = -7 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\
 & & & & & & t & = -\dfrac{7}{3} \quad \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \dfrac{7}{3}\mathrm{L}_1
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l}
x = 4 \\
y = \dfrac{2}{3} \\
z = 0 \\
t = -\dfrac{7}{3}
\end{array}\right.
$$

Le système admet une seule solution qui est

$$
\boxed{x = 4 \qquad y = \frac{2}{3} \qquad z = 0 \qquad t = -\frac{7}{3}}
$$

## Exercice 3.9

On étudie le système

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrl}
\lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = a \\
x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = a \\
x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = a
\end{array}\right.
$$

Afin de déterminer le nombre de solutions éventuelles de ce système, on en calcule le déterminant.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2-1) - (\lambda-1) + (1-\lambda) \\ &= \lambda(\lambda^2-1) - 2(\lambda-1) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) - 2(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda+2)\end{aligned}$$

On en déduit que le système admet une et une seule solution si et seulement si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$.

- **Si** $\lambda = 1$
  le système s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 = a \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 = a^2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 = a^3 \end{array}\right.$$

  Le système admet des solutions, si et seulement si

$$a = a^2 = a^3$$

  c'est à dire si et seulement si

$$a = 0 \qquad \text{ou} \qquad a = 1$$

  On en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } a \neq 0 \text{ ou } a \neq 1\text{, alors le système n'a pas de solution.} \\ \text{Si } a = 0 \text{ et } a = 1\text{, alors l'ensemble des solutions est} \\ \qquad\qquad \left\{(x, y, a-x-y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.\end{array}}$$

- **Si** $\lambda = -2$ le système s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{ccccl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 = a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 = a^2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 = a^3 \end{array}\right.$$

  En additionnant les trois lignes, on obtient

$$a + a^2 + a^3 = 0$$

  ceci est possible, si et seulement si

$$a = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad a = \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad a = 0$$

  Dans ce cas, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 = a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 = a^2 \end{array}\right.$$

  ou encore, en remplaçant la première ligne par $\mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2$

$$\left\{\begin{array}{ccccl} & - & 3x_2 & + & 3x_3 = a + 2a^2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 = a^2 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} x_3 = x_2 + \dfrac{a+2a^2}{3} \\ x_1 = x_2 + \dfrac{a^2-a}{3} \end{array}\right.$$

On en déduit que

> Si $a \neq 0$ et $a \neq \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $a \neq \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$, alors le système n'a pas de solution.
> Si $a = 0$ ou $a = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ ou $a = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$, alors l'ensemble des solutions est
> $$\left\{\left(x + \frac{a^2-a}{3}, x, x + \frac{a+2a^2}{3}\right) \qquad x \in \mathbb{R}\right\}.$$

- **Cas général**

  Dans le cas général, on peut inverser le système. Dans ce cas, nous allons utiliser la formule

  $$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\,{}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})$$

  On a alors

  $$\mathrm{com}(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

  Soit, en calculant les neuf déterminants

  $$\mathrm{com}(\mathrm{A}) = (\lambda - 1)\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

  On trouve finalement

  $$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{(\lambda+1)a - a^2 - a^3}{\lambda^2+\lambda-2} \\ x_2 = \dfrac{-a + (\lambda+1)a^2 - a^3}{\lambda^2+\lambda-2} \\ x_3 = \dfrac{-a - a^2 + (\lambda+1)a^3}{\lambda^2+\lambda-2} \end{array}}$$