Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 1[1]

Exercice 1

1.a

Rappel sur les coniques
Les coniques interviennent dans un nombre d'applications physiques et mathématiques si grand qu'il est indispensable de bien connaître leurs propriétés.

On peut les définir de plusieurs manières ; la plus géométrique est la suivante

« Soit D une droite et F un point. Soit e un réel positif. Alors la conique de *foyer* F et de *directrice* D est l'ensemble des points tels que

$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathrm{F}) = e\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathrm{D}) \text{ »}$$

Cette définition, quoiqu'élégante d'un point de vue géométrique, est peu utile en pratique.

Les coniques admettent également une *équation cartésienne*.

- **Ellipse**
  Une ellipse est l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant
  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- **Hyperbole**
  Une hyperbole est l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant
  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- **Parabole**
  Une parabole est l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant
  $$y^2 = 2px$$

En plus des équations cartésiennes, on retiendra dans notre cours les *représentations paramétriques*, que l'on va détailler ensuite.

[1] généré avec $\LaTeX\ 2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

- **Ellipse** $(0 < e < 1)$ Une ellipse peut être représentée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;2\pi\,]$$

- **Parabole** $(e = 1)$ Une parabole peut être représentée par

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

- **Hyperbole** $(e > 1)$ Une hyperbole peut être représentée par

$$\begin{cases} x(t) = \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ y(t) = \varepsilon b \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ε est égal à 1 ou à -1 (pour chacune des branches de l'hyperbole).

1.b Déterminons les vecteurs tangents et normaux pour chacune des coniques

Rappel
Pour une courbe paramétrée $t \mapsto \mathrm{M}(t)$, *un* vecteur tangent est donné par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}$. *Le* vecteur tangent est donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s}$$

où s est une abscisse curviligne. Le vecteur normal est le vecteur de norme 1 ayant même sens et même direction que la dérivée du vecteur tangent. Il est donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}}{\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} \right\|}$$

Calcul pratique des vecteurs tangents, normaux, etc...
En général, les courbes sont paramétrées par un réel t, alors que le paramètre naturel de calcul du vecteur normal est l'abscisse curviligne s. On peut en

fait les relier à l'aide des formules de changement de variable

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{T}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} \\
\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}} + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

est colinéaire au vecteur normal.

- **Ellipse** Une ellipse a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;2\pi\,]$$

On a ainsi
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

Donc
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit que
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \\ \dfrac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \end{pmatrix}}$$

Pour calculer le vecteur tangent, on va avoir besoin de calculer la dérivée seconde de l'abscisse curviligne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right) \\
&= \frac{2a^2\sin t\cos t - 2b^2\sin t\cos t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \\
&= \frac{(a^2 - b^2)\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}
\end{aligned}$$

Enfin, on calcule la dérivée seconde de $\overrightarrow{\mathrm{M}}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix} - \frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\begin{pmatrix} (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)(-a\cos t) + a(a^2-b^2)\sin^2 t\cos t \\ (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)(-b\sin t) - b(a^2-b^2)\sin t\cos^2 t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\begin{pmatrix} -ab^2\cos t \\ -a^2 b\sin t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -b\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix}}$$

- **Parabole** Une parabole admet comme représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

En dérivant, on obtient immédiatement

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{p} \end{pmatrix}$$

En en prenant la norme, on obtient la dérivée de l'abscisse curviligne

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}$$

Donc le vecteur tangent est égal à

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{t^2}{p^2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{p} \end{pmatrix}}$$

Pour déterminer le vecteur normal, nous allons déterminer la dérivée seconde de l'abscisse curviligne

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{t}{p^2\sqrt{1 + \dfrac{t^2}{p^2}}}$$

On détermine maintenant la dérivée seconde de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

Le vecteur normal a donc le même sens et la même direction que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} - \frac{t}{p^2+t^2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{p} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t^2+p^2}\begin{pmatrix} -t \\ \frac{p^2+t^2}{p} - \frac{t^2}{p} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t^2+p^2}\begin{pmatrix} -t \\ p \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+t^2}}\begin{pmatrix} -t \\ p \end{pmatrix}}$$

- **Hyperbole** Une hyperbole admet comme représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \varepsilon a \,\mathrm{ch}\, t \\ y(t) = \varepsilon b \,\mathrm{sh}\, t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

En dérivant une fois, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \varepsilon a \,\mathrm{sh}\, t \\ \varepsilon b \,\mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}$$

On en prend la norme, pour obtenir la dérivée de l'abscisse curviligne

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{a^2 \,\mathrm{sh}^2\, t + b^2 \,\mathrm{ch}^2\, t}$$

On obtient ainsi le vecteur tangent

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \,\mathrm{sh}^2\, t + b^2 \,\mathrm{ch}^2\, t}}\begin{pmatrix} \varepsilon a \,\mathrm{sh}\, t \\ \varepsilon b \,\mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}}$$

Afin de déterminer le vecteur normal, on commence par calculer la dérivée seconde de l'abscisse curviligne

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(a^2+b^2)\,\mathrm{sh}\, t \,\mathrm{ch}\, t}{\sqrt{a^2 \,\mathrm{sh}^2\, t + b^2 \,\mathrm{ch}^2\, t}}$$

On détermine la dérivée seconde du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} \varepsilon a \,\mathrm{ch}\, t \\ \varepsilon b \,\mathrm{sh}\, t \end{pmatrix}$$

Le vecteur normal a donc le même sens et la même direction que

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ \varepsilon b \operatorname{sh} t \end{pmatrix} - \frac{(a^2+b^2)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t} \begin{pmatrix} \varepsilon a \operatorname{sh} t \\ \varepsilon b \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t} \begin{pmatrix} \varepsilon a b^2 \operatorname{ch} t \\ -\varepsilon a^2 b \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}} \begin{pmatrix} \varepsilon b \operatorname{ch} t \\ -\varepsilon a \operatorname{sh} t \end{pmatrix}}$$

Exercice 2

Une étude de courbe paramétrée peut se dérouler de la manière suivante

1. Détermination de l'ensemble de définition.
2. Détermination des symétrie de la courbe afin de réduire l'intervalle sur lequel on va étudier les fonctions. Ceci se fait avec les propriétés de périodicité, parité et imparité des fonctions x et y.
3. Étude des fonctions x et y.
4. Étude des points de rebroussement.
5. Détermination des branches infinies.
6. Tracé d'un joli dessin (qui doit être fait au fur et à mesure), en calculant éventuellement d'autres points ainsi que leurs tangentes.

2.a Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont toutes les deux périodiques, de période 2π. On peut donc limiter l'étude de la courbe à $[-\pi\,;\pi]$. La fonction x est paire, et la fonction y est impaire. On en déduit que la courbe admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie, et on peut limiter l'étude des fonctions à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, et

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t(1+\cos t) + \cos t(-\sin t) = -\sin t(1+2\cos t) \\ y'(t) = \cos t(1+\cos t) + \sin t(-\sin t) = 2\cos^2 t + \cos t - 1 \end{cases}$$

Le signe de x' ne pose pas de problème.

Pour déterminer le signe de y', on commence par étudier le trinôme

$$2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$$

Ce trinôme a pour discriminant

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)2 = 9 = 3^2$$

et on en déduit que ses racines sont -1 et $1/2$. On obtient donc la factorisation suivante pour y'

$$y'(t) = 2(\cos t + 1)\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)$$

On en déduit que y' est positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, et négative sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$. On en déduit le tableau de variations suivant pour x et y.

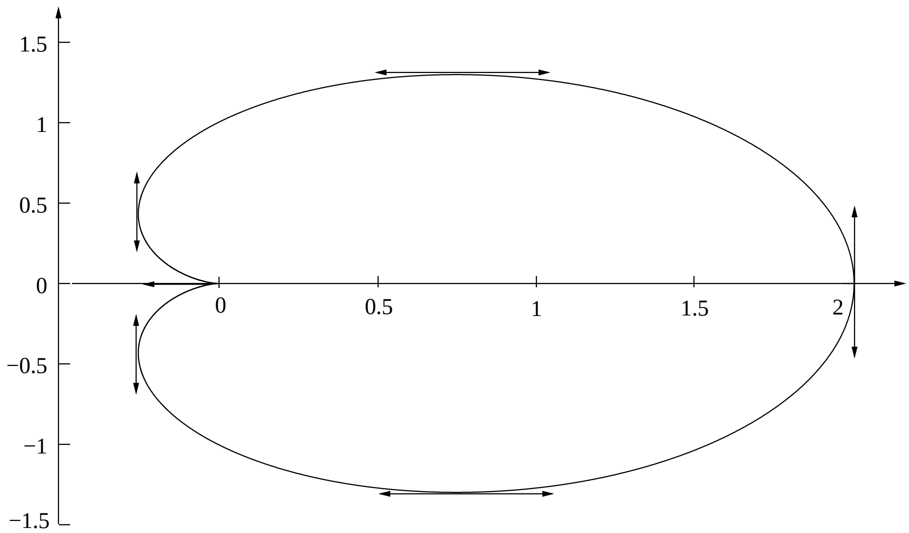
t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
y'	2	$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Le point π n'est pas un point régulier, car x' et y' s'annulent tous les deux. Afin de déterminer la tangente en ce point, on effectue un développement limité de x et de y au voisinage de ce point. Si x est au voisinage de π, on pose $x = \pi + h$, et on a

$$\begin{aligned} x(\pi+h) &= \cos(\pi+h)(1+\cos(\pi+h)) \\ &= -\cos h(1-\cos h) \\ &= -\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\pi+h) &= \sin(\pi+h)(1+\cos(\pi+h)) \\ &= -\sin h(1-\cos h) \\ &= \mathrm{o}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

On en déduit que la tangente en π est horizontale. On en déduit le tracé suivant



$\boxed{\textbf{2.b}}$ Comme on l'a vu à la question précédente, on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\sin t(2\cos t + 1) \\ (\cos t + 1)(2\cos t - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t + 1) \\ 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t - 1) \end{pmatrix}$$

Calculons la norme de ce vecteur

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 &= 4\cos^2\frac{t}{2}\left(\cos^2\frac{t}{2}(2\cos t - 1)^2 + \sin^2\frac{t}{2}(2\cos t + 1)^2\right) \\ &= 4\cos^2\frac{t}{2}\left(4\cos^2 t + 1 - 4\cos t\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= 4\cos^2\frac{t}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\| = 2\cos\frac{t}{2} \text{ si } t \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \text{et} \qquad \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\| = -2\cos\frac{t}{2} \text{ si } t \in [\,\pi\,;2\pi\,]$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t + 1) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t - 1) \end{pmatrix}}$$

Déterminons à présent le vecteur normal. Par définition,

$$\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}\right\|} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}\right\| \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

Commençons donc par calculer la dérivée du vecteur tangent par rapport à t.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t + 1) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin t \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t - 1) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin t \end{pmatrix}$$

Comme le vecteur normal est orthogonal au vecteur tangent, on sait que l'on doit trouver une première composant proportionnelle à

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t - 1)$$

et une deuxième composante proportionnelle à

$$-\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t + 1)$$

On va s'efforcer de faire apparaître ces quantités dans les coordonnées de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}$: pour la première coordonnée, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t+1)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin t &= -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(\cos t+\frac{1}{2}-4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\\
&= -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(\cos t+\frac{1}{2}-2+2\cos t\right)\\
&= -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(3\cos t-\frac{3}{2}\right)\\
&= -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t-1)
\end{aligned}$$

Et pour la seconde coordonnée

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t-1)-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin t &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t-1)-4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(\cos t-\frac{1}{2}+4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\\
&= -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(\cos t-\frac{1}{2}+2\cos t+2\right)\\
&= -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(3\cos t+\frac{3}{2}\right)\\
&= -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t+1)
\end{aligned}$$

On a donc trouvé que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t-1)\\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t+1)\end{pmatrix}$$

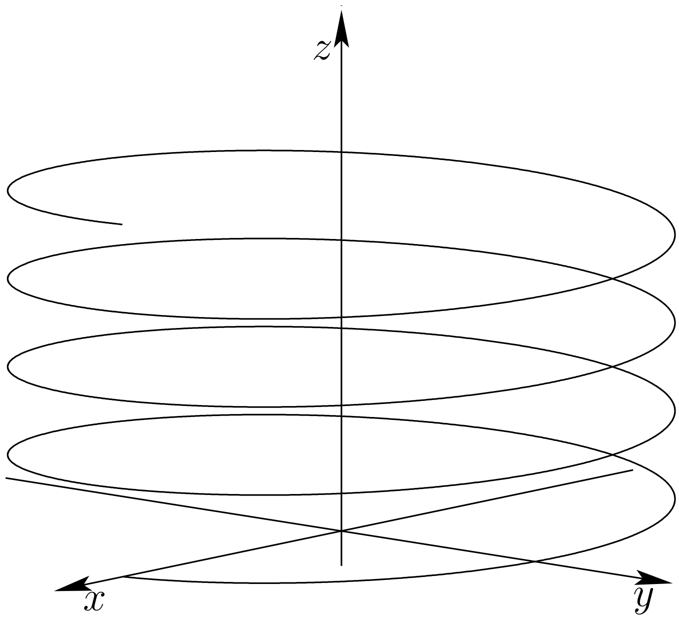
Finalement $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{N}}=\begin{pmatrix}-\cos\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t-1)\\ -\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos t+1)\end{pmatrix}}$$

$\boxed{\textbf{2.c}}$ D'après le cours, la longueur de cette courbe est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \int_0^{2\pi}\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_0^{\pi}\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|\,\mathrm{d}t\\
&= 4\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&= 4\left[\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{1/2}\right]_0^{\pi}\\
\mathscr{L} &= 8
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L} = 2}$$

Exercice 3



Calculons le vecteur tangent.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\,(-3\sin t, 3\cos t, 4)$$

Et sa norme est égale à

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 = 9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16 = 25 = 5^2$$

d'où
$$\boxed{\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\| = 5}$$

On en déduit que
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}}\left(-\frac{3}{5}\,\sin t, \frac{3}{5}\,\cos t, \frac{4}{5}\right)}$$

Le vecteur normal est défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left\|\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}\right\|}$$

Or
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{3}{5}\cos t, -\frac{3}{5}\sin t, 0\right)$$

On trouve ainsi, en normalisant ce vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{N}} = (-\cos t, -\sin t, 0)}$$

D'après la première formule de Frenet,

$$\overrightarrow{\mathrm{N}} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s}$$

Or
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{5}\cos t, -\frac{3}{5}\sin t, 0\right)\\ &= \frac{3}{25}(-\cos t, -\sin t, 0)\\ &= \frac{3}{25}\overrightarrow{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{25}{3}}$$

Calculons à présent le vecteur binormal. Par définition, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\sin t \\ \frac{3}{5}\cos t \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\sin t \\ -\frac{4}{5}\cos t \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\sin t \\ -\frac{4}{5}\cos t \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

On va maintenant dériver le vecteur binormal afin de calculer le rayon de torsion. On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cos t \\ \frac{4}{5}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cos t \\ \frac{4}{5}\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{25}\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{25}\overrightarrow{\mathrm{N}}$$

Or d'après la deuxième formule de Frenet,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{\mathrm{N}}$$

Finalement $$\boxed{\tau = \frac{25}{4}}$$

Exercice 4

Dans cet exercice, on s'intéresse à la courbe paramétrée

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ z(t) = \dfrac{t^3}{6} \end{cases}$$

4.a On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}(0) = (1,0,0) \qquad \text{et} \qquad \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}(0) \right\| = 1$$

soit $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}}(0) = (1,0,0)}$$

4.b Afin de calculer le vecteur normal, on va devoir dériver le vecteur tangent. On commence par en trouver une expression générale.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} \right\| \\ &= \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{t^4 + 4t^2 + 4}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(t^2+2)^2}{4}} \\ &= \frac{t^2+2}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{T}} &= \frac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}}{\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} \right\|} \\ &= \frac{2}{t^2+2}\left(1, t, \frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Dérivons maintenant $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ par rapport à t

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{4t}{(t^2+2)^2}\left(1, t, \frac{t^2}{2}\right) + \frac{2}{t^2+2}\,(0,1,t) \\
&= \frac{1}{(t^2+2)^2}\left[\,\left(-4t, -4t^2, -2t^3\right) + \left(0, 2(t^2+2), 2t(t^2+2)\right)\,\right] \\
&= \frac{1}{(t^2+2)^2}\,\left(-4t, -2t^2+4, 4t\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = (0,1,0)$$

On a donc trouvé un vecteur unitaire, ayant même sens et même direction que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s}$, il s'agit donc de $\overrightarrow{\mathrm{N}}$. Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{N}} = (0,1,0)}$$

De plus, comme $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0) = 1$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{R} = 1.}$$

4.c Commençons par calculer le vecteur binormal $\overrightarrow{\mathrm{B}}$.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{N}} = (0,0,1)}$$

D'après les calculs effectués à la question précédente, $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ a même sens et même direction que

$$(-4t, -2t^2+4, 4t)$$

Donc pour trouver le vecteur normal, il suffit de normaliser ce vecteur.

$$\begin{aligned}
\|(-4t, -2t^2+4, 4t)\|^2 &= 16t^2 + (2t^2-4)^2 + 16t^2 \\
&= 32t^2 + 4t^4 - 16t^2 + 16 \\
&= 4t^4 + 16t^2 + 16 \\
\|(-4t, -2t^2+4, 4t)\|^2 &= (2t^2+4)^2
\end{aligned}$$

On en déduit que
$$\overrightarrow{\mathrm{N}} = \left(-\frac{4t}{2t^2+4}, \frac{-2t^2+4}{2t^2+4}, \frac{4t}{2t^2+4}\right)$$

Afin de déterminer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t}$, on effectue un développement limité de $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ à l'ordre 1

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{N}}(t) &= \left(-\frac{4t}{2t^2+4}, \frac{-2t^2+4}{2t^2+4}, \frac{4t}{2t^2+4}\right) \\
&= (-t, 1, t) + \mathrm{o}\,(t) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{N}}(t) + t\,(-1,0,1) + \mathrm{o}\,(t)
\end{aligned}$$

On en déduit que
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t}\,(t=0) = (-1,0,1)$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t=0) = 1$, il vient

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s}(s=0) = (-1,0,1)$$

Enfin, on calcule la dérivée du vecteur binormal de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\overrightarrow{\mathrm{T}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{N}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} \wedge \overrightarrow{\mathrm{N}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{N}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{N}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\tau = 1}$$