Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 3[1]

Une méthode pour calculer une intégrale en deux dimensions sur un domaine donné peut consister à

1. Choisir un jeu de paramètres (exemple : coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires, coordonnées elliptiques, etc...). Ici, on note φ ce paramétrage :
$$\overrightarrow{\varphi} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$
2. Calculer le Jacobien du paramétrage. Pour une intégrale en deux dimensions, on retiendra que celui-ci est égal à
$$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|$$
Cette étape est inutile si on paramètre en cartésiennes, car dans ce cas, le Jacobien vaut 1.
3. Chercher les bornes d'intégrations.
4. Calculer les intégrales obtenues.

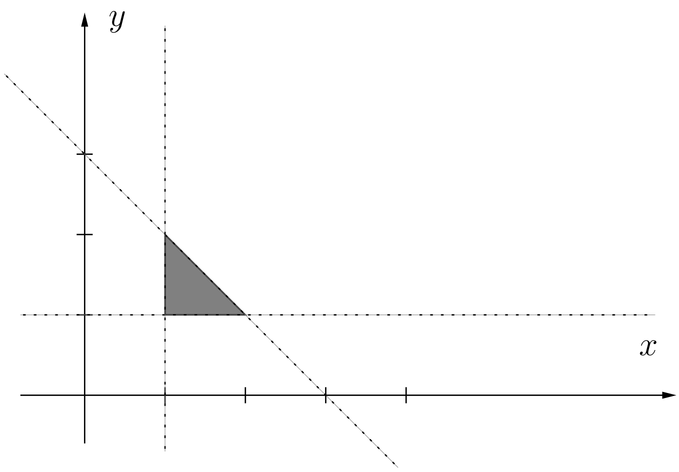
Exercice 1

$\boxed{\textbf{1.a}}$ On cherche à calculer l'intégrale

$$\iint \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$$

sur le domaine $\quad \mathrm{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x > 1 \quad y > 1 \quad x + y < 3\right\}$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`



Paramétrons le domaine par x. Ce paramètre varie de 1 à 2. Pour un x donné, y varie de 1 à $3-x$. On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3} &= \int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=1}^{3-x}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^3}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{x=1}^{2}\left[-\frac{1}{2(x+y)^2}\right]_{y=1}^{3-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{1}^{2}\left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{x}{18}\right]_1^2+\left[-\frac{1}{2(1+x)}\right]_1^2\\
\iint_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3} &= -\frac{1}{18}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

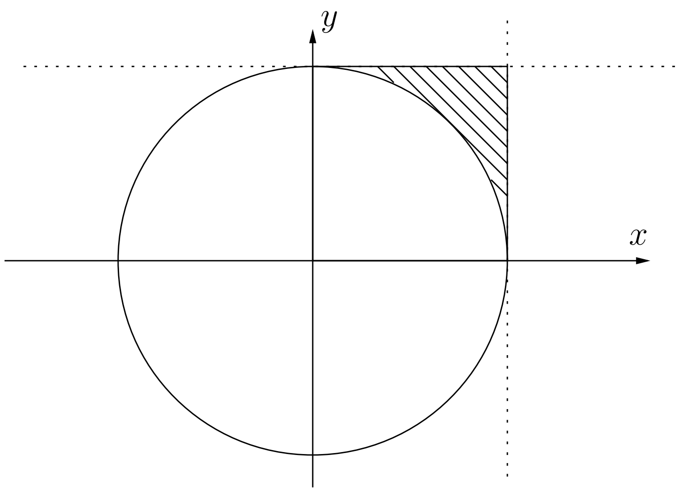
Finalement $$\boxed{\iint_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3} = \frac{1}{36}}$$

$\boxed{\mathbf{1.b}}$ On cherche à calculer l'intégrale

$$\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$$

sur le domaine

$$D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad 0<x<1 \;\; 0<y<1 \;\; x^2+y^2>1\right\}$$



Première méthode : paramétrisation cartésienne
On choisit comme premier paramètre x, qui va de 0 à 1. Pour un x donné, y varie de $\sqrt{1-x^2}$ à 1. On a alors

$$\begin{aligned}
\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} \frac{xy\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} x \left(\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} x \left[\frac{1}{2} \ln\left|1+x^2+y^2\right| \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} \mathrm{d}x \\
\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \int_{0}^{1} \left(\frac{x\ln(2+x^2)}{2} - \frac{x}{2}\ln 2 \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale se calcule immédiatement

$$\int_0^1 -\frac{x}{2}\ln 2\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{\ln 2}{4}$$

Intégrons par parties la première intégrale, en posant

$$\begin{array}{lll}
u(x) = \ln(2+x^2) & \text{d'où} & u'(x) = \dfrac{2x}{2+x^2} \\
v'(x) = \dfrac{x}{2} & \text{on choisit} & v(x) = \dfrac{x^2}{4}
\end{array}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\ln(2+x^2)}{2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2\ln(2+x^2)}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{2(x^2+2)} \\
&= \frac{\ln 3}{4} - \int_0^1 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{2(x^2+2)}
\end{aligned}$$

En effectuant la division euclidienne de x^3 par x^2+2, il vient

$$x^3 = x(x^2+2) - 2x$$

d'où
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\ln(2+x^2)}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\ln 3}{4} - \int_0^1 \frac{x(x^2+2)-2x}{2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\ln 3}{4} - \int_0^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\ln 3}{4} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{\ln|x^2+2|}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{\ln 3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\ln\frac{3}{2}}{2}\\ \int_0^1 \frac{x\ln(2+x^2)}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}\end{aligned}$$

en rassemblant les deux morceaux, on obtient

$$\boxed{\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \frac{3\ln 3 - 3\ln 2 - 1}{4}}$$

> Pour la première intégrale, on peut également remarquer qu'elle est de la forme
> $$\int_0^1 \frac{u'(x)\ln u(x)}{4}\,\mathrm{d}x$$
> avec $u\,:\,x\mapsto x^2+2$. En faisant ce changement de variable, il vient
> $$\int_0^1 \frac{2x\ln(2+x^2)}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(2+x^2)\left(\ln(2+x^2)-1\right)}{4}\right]_0^1 = \frac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}$$

Deuxième méthode : paramétrage en polaire

Posons
$$\begin{aligned}x(r,\theta) &= r\cos\theta\\ y(r,\theta) &= r\sin\theta\end{aligned}$$

Calculons le Jacobien de ce changement de variables

$$\frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial r} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$$

On rajoute une coordonnée nulle selon z à chacun de ces vecteurs pour avoir un vecteur de $\mathbb{R}^3$, et on effectue le produit vectoriel

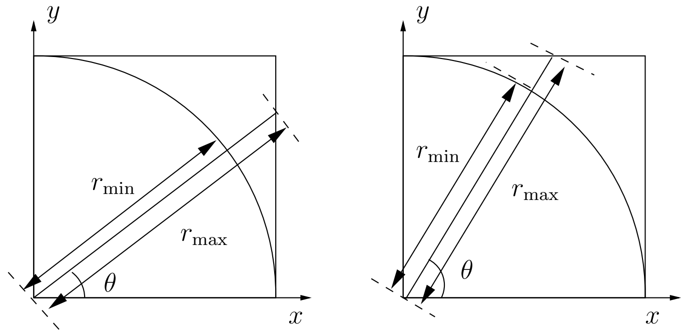
$$\frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial r} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ r\end{pmatrix}$$

On en déduit que le Jacobien est égal à r. On a ainsi

$$\frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \frac{r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{1+r^2}$$

Cherchons à présent les bornes sur r et θ qui permettent de décrire le domaine. On a le choix entre deux solutions : soit chercher les bornes sur r pour θ fixé, soit chercher les bornes sur θ pour r fixé.

- **Recherche des bornes sur r pour θ fixé**



Dans ce cas, deux cas se présentent : si θ est inférieur à $\pi/4$ (figure de gauche), alors r varie entre 1 et $1/\cos\theta$; si θ est supérieur à $\pi/4$ (figure de droite), alors r varie entre 1 et $1/\sin\theta$. Il vient alors

$$\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=1}^{1/\cos\theta} \frac{r^3 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r}{1+r^2} \right) \mathrm{d}\theta + \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{r=1}^{1/\sin\theta} \frac{r^3 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r}{1+r^2} \right) \mathrm{d}\theta$$

Commençons par calculer les intégrales en r. Pour cela, on effectue la division euclidienne de r^3 par $1+r^2$

$$r^3 = r(1+r^2) - r$$

d'où
$$\frac{r^3}{1+r^2} = r - \frac{r}{1+r^2}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_1^{1/\cos\theta} \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{1+r^2} &= \int_1^{1/\cos\theta} \left(r - \frac{r}{1+r^2} \right) \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+r^2) \right]_1^{1/\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{2} \right)
\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}
\int_1^{1/\sin\theta} \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{1+r^2} &= \int_1^{1/\sin\theta} \left(r - \frac{r}{1+r^2} \right) \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+r^2) \right]_1^{1/\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1 \right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Il reste à intégrer les intégrales en θ. Intéressons nous à

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\cos^2\theta}}{2}\right)\right) \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Dans cette intégrale, posons $u = \cos\theta$. On a alors $\mathrm{d}u = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$. De plus, lorsque $\theta = \pi/4$, alors $u = \sqrt{2}/2$, et lorsque $\theta = 0$, on a $u = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}/2} \left(\left(\frac{1}{u^2} - 1\right) - \ln\left(\frac{1+\frac{1}{u^2}}{2}\right)\right) u(-\mathrm{d}u) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{u} - u - u\ln\left(\frac{1+\frac{1}{u^2}}{2}\right)\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{u} - u - u\ln(1+u^2) + u\ln(2u^2)\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln u - \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}(1+u^2)\left(\ln(1+u^2)-1\right) + \frac{1}{4}(2u^2)\left(\ln(2u^2)-1\right)\right]_{\sqrt{2}/2}^1 \\
\mathrm{I}_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}
\end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sin^2\theta}}{2}\right)\right) \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Dans cette intégrale, posons $u = \sin\theta$. On a alors $\mathrm{d}u = \cos\theta\mathrm{d}\theta$. De plus, lorsque $\theta = \pi/4$, alors $u = \sqrt{2}/2$, et lorsque $\theta = \pi/2$, on a $u = 1$. On a alors

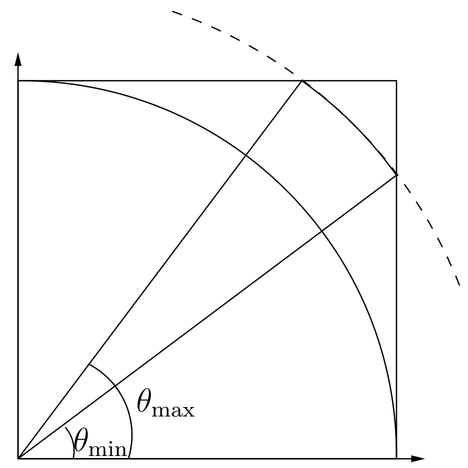
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\left(\frac{1}{u^2} - 1\right) - \ln\left(\frac{1+\frac{1}{u^2}}{2}\right)\right) u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{u} - u - u\ln\left(\frac{1+\frac{1}{u^2}}{2}\right)\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{u} - u - u\ln(1+u^2) + u\ln(2u^2)\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln u - \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}(1+u^2)\left(\ln(1+u^2)-1\right) + \frac{1}{4}(2u^2)\left(\ln(2u^2)-1\right)\right]_{\sqrt{2}/2}^1 \\
\mathrm{I}_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}
\end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{I}_{\mathrm{D}_2} = \frac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}}$$

> Le fait qu'on trouve la même valeur pour I_1 et I_2 n'est pas du tout surprenant : en effet, I_1 et I_2 correspondent à l'intégration d'une expression

symétrique en x et y, sur deux domaines qui sont symétriques en x et y. On peut voir cette symétrie également en effectuant le changement de variable $\theta' = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ dans I_1 ou I_2.

- **Recherche des bornes sur θ pour r fixé**



Le rayon r var varier entre 1 et $\sqrt{2}$. Pour un rayon r donné, on a

$$\begin{cases} \theta_{\min} = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{r}\right) \\ \theta_{\max} = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{r}\right) \end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \int_{\operatorname{Arccos}(1/r)}^{\operatorname{Arcsin}(1/r)} \frac{r^3 \sin\theta\cos\theta}{1+r^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{1+r^2} \int_{\operatorname{Arccos}(1/r)}^{\operatorname{Arcsin}(1/r)} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{1+r^2} \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\operatorname{Arccos}(1/r)}^{\operatorname{Arcsin}(1/r)} \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{1+r^2} \left(\frac{1}{r^2} - \sin^2\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

D'après l'égalité $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

on a $$\sin^2\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = 1 - \frac{1}{r^2}$$

d'où $$\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2} \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \frac{r(2-r^2)}{1+r^2}\,\mathrm{d}r$$

Effectuons a division euclidienne de la fraction rationelle

$$-r^3 + 2r = (-r)(1+r^2) + 3r$$

On parvient ainsi à

$$\begin{aligned}\iint \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \left(-r + \frac{3r}{1+r^2}\right)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{r^2}{2} + \frac{3}{2}\ln(1+r^2)\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2\right)\end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{I}_{\mathrm{D}_2} = \frac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}}$$

Troisième méthode : Mélange des deux

Lorsqu'on regarde le domaine, on s'aperçoit qu'il correspond à un carré, qui se paramètre facilement en cooordonnées cartésiennes, auquel on a retiré un morceau de disque, qui se paramètre facilement en polaires. On récrit donc l'intégrale sous la forme

$$\iint_{\mathrm{D}_2} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} - \iint_{\mathrm{D}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$$

où C est le carré $[\,0\,;1\,]\times[\,0\,;1\,]$, et D le quart du disque unité supérieur droit.

- **Calcul de l'intégrale sur** C

  Pour intégrer sur le carré, on paramètre en coordonnées cartésiennes (x, y). Pour décrire tout le carré, on a $x \in [\,0\,;1\,]$, et $y \in [\,0\,;1\,]$. On a alors

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \frac{xy\,\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{1} y\left[\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{2}\right]_{x=0}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1} y\left(\ln(2+y^2) - \ln(1+y^2)\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(2+y^2)(\ln(2+y^2)-1)}{2} - \frac{(1+y^2)(\ln(1+y^2)-1)}{2}\right]_0^1 \\ \iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{4}\end{aligned}$$

- **Calcul de l'intégrale sur** D

  Pour intégrer sur le quart de disque unité, on paramètre en coordonnées polaires (r, θ). Pour décrire tout le quart de disque, on a $r \in [\,0\,;1\,]$, et $\theta \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$. On a alors

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{1+r^2} \\ &= \int_{r=0}^{1} \frac{r^3}{1+r^2}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r \\ &= \int_{r=0}^{1} \frac{r^3}{1+r^2}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\,\mathrm{d}r \\ \iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on commence par effectuer la division euclidienne

$$r^3 = r(1+r^2) - r$$

d'où

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(r - \frac{r}{1+r^2}\right)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\,\ln(1+r^2)\right]_0^1 \\ \iint_{\mathrm{C}} \frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{4}\end{aligned}$$

On trouve finalement $\boxed{\mathrm{I}_{\mathrm{D}_2} = \dfrac{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}{4}}$

1.c On cherche à calculer l'intégrale

$$\iint \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sur le domaine

$$\mathrm{D}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x>0 \quad y>0 \quad x+y<1\right\}$$

On paramètre le triangle suivant les droites $x+y=u$. Pour une de ces droites données, on choisit x comme paramètre. Notre paramétrage est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ u-x \end{pmatrix}$$

dont le jacobien est égal à 1. On a alors

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{D}_3} \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^u \mathrm{e}^{\frac{2x-u}{u}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}\left[\frac{u\mathrm{e}^{\frac{2x}{u}}}{2}\right]_0^u \mathrm{d}u \\ \iint_{\mathrm{D}_3} \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\iint_{\mathrm{D}_3} \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4\mathrm{e}}}$

Exercice 2

Rappel : Aire d'une surface paramétrée
Si une surface est paramétrée par deux réels $(u,v) \in \mathrm{D} \mapsto \mathrm{M}(u,v)$, alors son aire est égale à

$$\Sigma = \iint_{\mathrm{D}} \left\| \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial v} \right\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$\boxed{\textbf{2.a}}$ On paramètre la surface donnée en coordonnées cylindriques. Dans ces coordonnées, la surface a pour équation

$$z = r^2$$

On peut donc paramétrer la surface par

$$(z, \theta) \mapsto (\sqrt{z}, \theta, z)$$

La surface est alors donnée par

$$\mathrm{S} = \iint_\Sigma \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} \right\| \mathrm{d}\Sigma$$

En base cartésienne, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z, \theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{z}\,\cos\theta \\ \sqrt{z}\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

d'où $$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{z}} \\ \dfrac{\sin\theta}{2\sqrt{z}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sqrt{z}\sin\theta \\ \sqrt{z}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sqrt{z}\cos\theta \\ \sqrt{z}\sin\theta \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

soit $$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{z + \frac{1}{4}}$$

Il vient alors $$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(\Sigma) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} \sqrt{z + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_{z=0}^{h} \left(z + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \left[\frac{2\left(z + \frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\left(h + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right) \end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{Aire}(\Sigma) = \frac{4\pi}{3} \left(\left(h + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right)}$$

$\boxed{\textbf{2.b}}$

> **Rappel : Aire d'une surface de révolution**
> Une surface de révolution $(z,\theta) \mapsto (r(z),\theta,z)$ avec $z \in [\,c\,;d\,]$ a pour aire
> $$\Sigma = 2\pi \int_c^d r(z)\sqrt{1+r'(z)^2}\,\mathrm{d}z$$

Dans notre cas, on a $r(z)=\sqrt{z}$. On en déduit que

$$r'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

d'où $$r(z)\sqrt{1+r'(z)^2} = \sqrt{z}\sqrt{1+\frac{1}{4z}} = \sqrt{z+\frac{1}{4}}$$

et on retombe sur l'intégrale calculée à la question précédente. On retrouve ainsi que

$$\boxed{\mathrm{Aire}(\Sigma) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(h+\frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8}\right)}$$

Exercice 3

3.a On cherche à calculer l'aire du cylindre d'équation

$$x^2+y^2-ax=0$$

Pour ce faire, nous allons nous placer dans le système de coordonnées cylindriques attachées à ce cylindre. On commence donc par déterminer les caractéristiques de ce cylindre

$$\begin{aligned} x^2+y^2-ax=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Ce cylindre a donc pour axe l'axe $x=a/2$, et pour rayon $a/2$. Les coordonnées cylindriques qui lui sont attachées sont donc

$$\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos\theta \\ y(\theta) = \dfrac{a}{2}\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Calculons le Jacobien de ce paramétrage. On a

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2}\sin\theta \\ \dfrac{a}{2}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2}\cos\theta \\ \dfrac{a}{2}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial z} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cos^2\theta + \frac{a^2}{4} \sin^2\theta} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Déterminons à présent les ensembles dans lesquels les deux paramètres, z et θ varient. Pour cela, on va calculer l'intersection du cylindre avec la sphère de centre 0 et de rayon a. Si un point appartient à la fois à la sphère et au cylindre, alors

$$\left\{ \begin{aligned} x(\theta) &= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos\theta \\ y(\theta) &= \frac{a}{2} \sin\theta \\ z &= z \\ a^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right.$$

En injectant les coordonnées sur le cylindre dans l'équation de la sphère, on obtient

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos\theta\right)^2 + \frac{a^2}{4} \sin^2\theta + z^2 = a^2$$

d'où $$z^2 = \frac{a}{2} (1 - \cos\theta) = a^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On en déduit que pour θ donnée, z va varier entre $-a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ à $a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On en déduit que l'aire du cylindre contenue dans la sphère de centre 0 et de rayon a est

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a\sin(\theta/2)}^{z=a\sin(\theta/2)} \frac{a}{2} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta \\ &= a^2 \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\ \mathrm{S} &= 4a^2 \end{aligned}$$

Finalement, la surface du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$ contenue dans la sphère de centre O et de rayon a est égale à

$$\boxed{\mathrm{S} = 4a^2}$$

$\boxed{\textbf{3.b}}$ On cherche à calculer une portion d'aire de la sphère de centre O et de rayon a. On paramètre cette sphère en coordonnées sphériques classiques

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a \sin\theta \cos\varphi \\ y &= a \sin\theta \sin\varphi \\ z &= a \cos\theta \end{aligned} \right.$$

Calculons le Jacobien de ce paramétrage. On a

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} a \cos\theta \cos\varphi \\ a \cos\theta \sin\varphi \\ -a \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -a \sin\theta \sin\varphi \\ a \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ a^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ a^2 \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix}$$

soit
$$\left\|\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial\varphi}\right\| = a^2\sin\theta$$

Afin de déterminer les bornes du domaine sur lequel on va intégrer en θ et φ, recherchons l'intersection de la sphère avec le cylindre d'équation

$$x^2+y^2-ax=0$$

En injectant les coordonnées des points de la sphère dans l'équation du cylindre, il vient
$$a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi-a^2\sin\theta\cos\varphi=0$$
ce qui est équivalent à
$$a^2\sin\theta\,(\sin\theta-\cos\varphi)=0$$
On a donc soit $\theta=0$, soit $\theta=\pi$, soit
$$\sin\theta=\cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$
cette dernière équation trigonométrique est équivalente à
$$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi+2k\pi\\ \text{ou}\\ \theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+\varphi+2k\pi\end{cases}$$
Comme on ne s'intéresse qu'à la partie supérieure de la sphère, on a $\theta\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, vu la région où se trouve le cylindre, on a $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que pour θ fixé dans $[\,0\,;\pi\,]\,2$, l'angle φ va varier entre $\theta-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\theta$. Cette est représentée dans sur la figure suivante

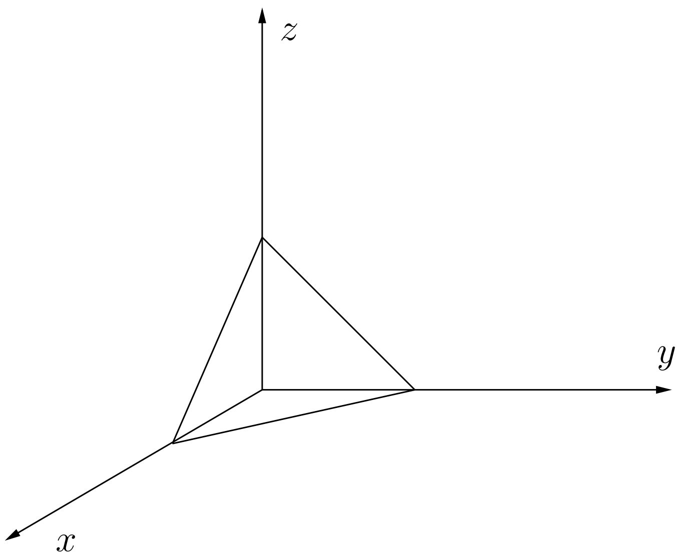
On en déduit que la surface que l'on cherche à calculer est égale à
$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{C}}\mathrm{dS}&=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=\theta-\pi/2}^{\varphi=\pi/2-\theta}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=a^2\int_{\theta=0}^{\pi/2}(\pi-2\theta)\sin\theta\end{aligned}$$
Intégrons par parties, en posant
$$\begin{array}{lll}u(\theta)=\pi-2\theta & \text{d'où} & u'(\theta)=-2\\ v'(\theta)=\sin\theta & \text{on choisit} & v(\theta)=-\cos\theta\end{array}$$

On obtient alors
$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{C}} \mathrm{dS} &= \left[-(\pi-2\theta)\cos\theta\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \pi - 2\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2}\\ &= \pi - 2\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\iint_{\mathscr{C}} \mathrm{dS} = \pi - 2}$$

Exercice 4

> **Rappel : Calcul pratique d'un flux**
> Une méthode pour calculer le flux d'un vecteur à travers une surface Σ peut consister à
>
> 1. Choisir un jeu de paramètres (exemple : coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires, coordonnées elliptiques, etc...). Ici, on note φ ce paramétrage :
> $$\overrightarrow{\varphi} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$
> 2. Calculer le vecteur $$\frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}$$
> 3. Calculer le vecteur $\overrightarrow{f}(\varphi(u,v))$ (c'est à dire : prendre la valeur de $\overrightarrow{f}$ le long de Σ), puis son produit scalaire par $\dfrac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}$.
> 4. Chercher les bornes d'intégrations (qui ne dépendent que de Σ, pas de $\overrightarrow{f}$).
> 5. Calculer l'intégrale
> $$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{f}(\varphi(u,v)) \cdot \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
>
> Si rien n'est précisé, cette méthode peut donner deux résultats différents, de signes opposés (dû à l'ordre dans lequel on fait le produit vectoriel). En général, on précise (comme c'est le cas ici) si le flux est *rentrant* ou *sortant*. Calculer un flux *rentrant* signifie qu'on doit choisir l'ordre de u et v de telle sorte que le vecteur $\dfrac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}$ rentre dans le volume sur lequel s'appuie la surface. Si on trouve un vecteur $\dfrac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}$ sortant, on doit donc changer le signe de chacunes de ses coordonnées.



4.a Calculons le flux de $\overrightarrow{f}$ à travers les surfaces S_1, S_2 et S_3

- **Flux à travers** S_1
  La surface S_1 est dans le plan $y\mathrm{O}z$. La normale sortante de S_1 est $-\overrightarrow{e}_x$. On paramètre cette surface par $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant y+z \leqslant a$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \iint_{S_1} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{dS} \\
&= -\iint_{S_1} yz \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a-y} yz \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^a y\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{a-y} \mathrm{d}y \\
&= -\int_0^a \frac{y(a-y)^2}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \frac{(a-y)^3}{2}\,\mathrm{d}y - a\int_0^a \frac{(a-y)^2}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[-\frac{(a-y)^4}{8}\right]_0^a - a\left[-\frac{(a-y)^3}{6}\right]_0^a \\
&= \frac{a^4}{8} - \frac{a^4}{6} \\
\iint_{S_1} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \frac{3a^4 - 4a^4}{24}
\end{aligned}
$$

  Finalement $$\boxed{\iint_{S_1} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{a^4}{24}}$$

- **Flux à travers** S_2
  La surface S_2 est dans le plan $z\mathrm{O}x$. La normale sortante de S_2 est $-\overrightarrow{e}_y$. On

paramètre cette surface par $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant x+z \leqslant a$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \iint_{S_2} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{dS} \\
&= -\iint_{S_1} xz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= -\int_{x=0}^{a}\int_{z=0}^{a-x} xz \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^a x \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{a-x} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \frac{(a-x)^3}{2} \,\mathrm{d}x - a\int_0^a \frac{(a-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{(a-x)^4}{8}\right]_0^a - a\left[-\frac{(a-x)^3}{6}\right]_0^a \\
&= \frac{a^4}{8} - \frac{a^4}{6} \\
\iint_{S_2} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \frac{3a^4 - 4a^4}{24}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\iint_{S_2} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{a^4}{24}}$$

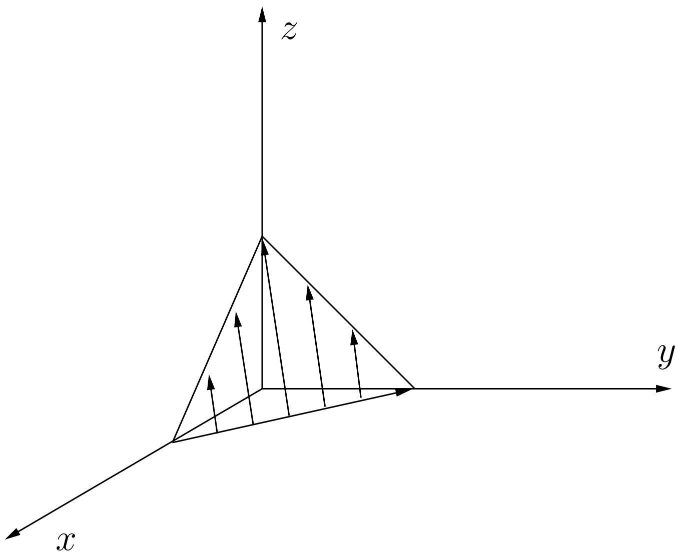
- **Flux à travers** S_3
  La surface S_3 est dans le plan $x\mathrm{O}y$. La normale sortante de S_3 est $-\overrightarrow{e}_z$. On paramètre cette surface par $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant x+y \leqslant a$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \iint_{S_3} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{dS} \\
&= -\iint_{S_1} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^a x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a-x} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \frac{(a-x)^3}{2} \,\mathrm{d}x - a\int_0^a \frac{(a-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{(a-x)^4}{8}\right]_0^a - a\left[-\frac{(a-x)^3}{6}\right]_0^a \\
&= \frac{a^4}{8} - \frac{a^4}{6} \\
\iint_{S_3} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \frac{3a^4 - 4a^4}{24}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\iint_{S_3} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{a^4}{24}}$$

$\boxed{\textbf{4.b}}$ **Méthode par paramétrisation directe**

On paramètre le triangle en u, qui est la position sur la base du triangle dans le plan $x\mathrm{O}y$, puis en v, qui est la position sur la droite orthogonale à la base, et dans le plan $x + y + z = a$.



La base du triangle se trouvant dans le plan $x\mathrm{O}y$ est portée par le vecteur $\overrightarrow{e}_y - \overrightarrow{e}_x$. Un vecteur normal au plan est $(1, 1, 1)$. On en déduit qu'un vecteur normal à la base, et se trouvant dans le plan $x+y+z = a$ est colinéaire au produit vectoriel de $\overrightarrow{e}_y - \overrightarrow{e}_x$ par $(1, 1, 1)$.

$$(1, 1, 1) \wedge (-1, 1, 0) = (-1, -1, 2)$$

Ainsi, le plan à travers lequel on va calculer le flux de $\overrightarrow{f}$ peut être paramétré par

$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - u - v \\ u - v \\ 2v \end{pmatrix}$$

De plus $$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculons à présent le produit scalaire, puis substituons les valeurs de x, y et z en fonction des paramètres u et v

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial v} &= 2(xy + xz + yz) \\
&= 2\Big((a - u - v)(u - v) + (a - u - v)(2v) + (u - v)(2v)\Big) \\
&= 2\Big(au - u^2 - uv - av + uv + v^2 + 2av - 2uv - 2v^2 + 2uv - 2v^2\Big) \\
&= 2\Big(au + av - u^2 - 3v^2\Big)
\end{aligned}$$

Le paramètre u est compris entre 0 et a. Lorsque $u < a/2$, Le réel v maximal est tel que la droite coupe le plan $x\mathrm{O}z$, c'est à dire que $0 < v < u$. Lorsque $u > a/2$, v est compris entre 0 et $a - u$.

d'où
$$\begin{aligned}\iint_{S_4} \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= 2\iint_{S_4} (xy+xz+yz)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= 2\left(\int_{u=0}^{a/2}\int_{v=0}^{u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\right.\\ &\quad\left.+\int_{u=a/2}^{a}\int_{v=0}^{a-u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)\end{aligned}$$

- **Calcul de la première intégrale**

  On commence par calculer l'intégrale en v :

$$\begin{aligned}\int_{v=0}^{u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}v &= \left[auv+\frac{av^2}{2}-u^2v-v^3\right]_0^u\\ &= au^2+\frac{au^2}{2}-u^3-u^3\\ \int_{v=0}^{u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}v &= \frac{3au^2}{2}-2u^3\end{aligned}$$

  On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{u=0}^{a/2}\int_{v=0}^{u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u &= \int_0^{a/2}\frac{3au^2}{2}-2u^3\ \mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{au^3}{2}-\frac{u^4}{2}\right]_0^{a/2}\\ &= \frac{a^4}{32}\end{aligned}$$

- **Calcul de la seconde intégrale**

  On commence par calculer l'intégrale en v :

$$\begin{aligned}\int_{v=0}^{a-u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}v &= \left[auv+\frac{av^2}{2}-u^2v-v^3\right]_0^{a-u}\\ &= au(a-u)+\frac{a(a-u)^2}{2}-u^2(a-u)\\ &\quad -(a-u)^3\\ &= (a-u)\left(au+\frac{a(a-u)}{2}-u^2-(a-u)^2\right)\\ &= (a-u)\left(u(a-u)+\frac{a(a-u)}{2}-(a-u)^2\right)\\ &= (a-u)^2\left(u+\frac{a}{2}-(a-u)\right)\\ \int_{v=0}^{u} \left(au+av-u^2-3v^2\right)\ \mathrm{d}v &= (a-u)^2\left(2u-\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_a^{a/2} (a-u)^2 \left(2u - \frac{a}{2}\right) \mathrm{d}u &= 2\int_{a/2}^{a} (a-u)^2 \left(u - \frac{a}{4}\right) \mathrm{d}u \\
&= 2\int_{a/2}^{a} (a-u)^2 \left(u - a + \frac{3a}{4}\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{3a}{2}\int_{a/2}^{a} (a-u)^2 \,\mathrm{d}u - 2\int_{a/2}^{a} (a-u)^3 \,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{3a}{2}\left[\frac{(a-u)^4}{4}\right]_{a/2}^{a} + 2\left[\frac{(a-u)^4}{4}\right]_{a/2}^{a} \\
&= \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^4 \\
&= \frac{a^4}{16} - \frac{a^4}{32} \\
\int_a^{a/2} (a-u)^2 \left(2u - \frac{a}{2}\right) \mathrm{d}u &= \frac{a^4}{32}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\iint_{\mathrm{S}_4} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \frac{a^4}{8}}$$

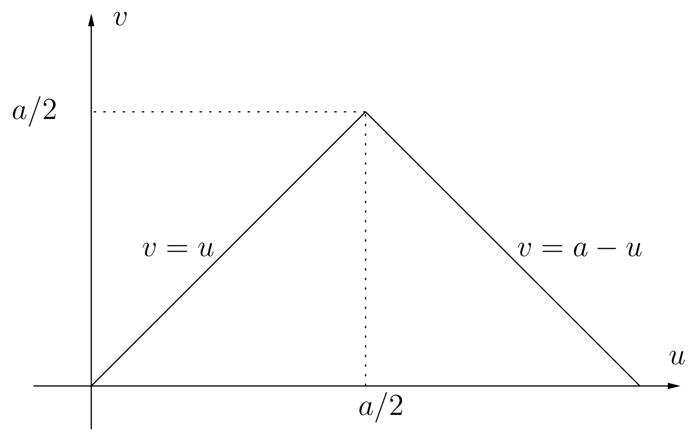
Méthode avec une intégrale curviligne

> **Rappel : formule de Green**
>
> On a $$\oint \mathrm{P}\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}y = \iint \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
>
> où la circulation est calculée dans le sens positif.
> Cette formule est utile dans les deux sens : elle permet soit de remplacer une intégrale curviligne par une intégrale de surface, soit le contraire.

On part de l'intégrale une fois qu'elle a été paramétrée. On avait trouvé

$$\iint_{\mathrm{S}_4} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = 2\left(\iint_{\mathrm{T}ri} \left(au + av - u^2 - 3v^2\right) \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\right)$$

où Tri est le triangle suivant



Posons
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} = av - 3v^2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial v} = -(au - u^2) \end{cases}$$

On choisit
$$\begin{cases} \mathrm{Q}(u,v) = avu - 3uv^2 \\ \mathrm{P}(u,v) = -auv + vu^2 \end{cases}$$

Il reste à calculer a circulation du vecteur (P,Q) le long du triangle. On va calculer cette circulation sur chacun des trois côtés

- **Côté inclus dans la droite** $v = 0$ **(côté** C_1**)**
  Le long de ce côté, le vecteur (P,Q) est nul, on en déduit que sa circulation est nulle.
- **Côté inclus dans la droite** $v = a - u$**(côté** C_2**)**
  On paramètre cette droite par v, qui va de 0 à $a/2$. Le long de cette droite, on a $u = a - v$. Par ailleurs, on a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}v$. L'intégrale le long de ce segment devient alors
$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{C}_2} \mathrm{P}\,\mathrm{d}u + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathrm{C}_2} (-auv + vu^2)\,\mathrm{d}u + (avu - 3uv^2)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{a/2} \left(-av(a-v) + v(a-v)^2\right)(-\mathrm{d}v) \\ &\qquad + \left(av(a-v) - 3(a-v)v^2\right)\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{a/2} \left(a^2v + 2v^3 - 3av^2\right)\mathrm{d}v \\ &= \left[\frac{a^2v^2}{2} + \frac{2v^4}{4} - \frac{3av^3}{3}\right]_0^{a/2} \\ \int_{\mathrm{C}_2} \mathrm{P}\,\mathrm{d}u + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}v &= \frac{a^4}{32} \end{aligned}$$
- **Côté inclus dans la droite** $v = u$**(côté** C_3**)**
  On paramètre le segment du triangle inclus dans la droite $v = u$ par v. Ce paramètre va de $a/2$ à 0. Le long de ce segment, on a $u = v$, donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$. L'intégrale le long de ce segment devient alors
$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{C}_3} \mathrm{P}\,\mathrm{d}u + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathrm{C}_3} (-auv + vu^2)\,\mathrm{d}u + (avu - 3uv^2)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{a/2}^{0} (-av^2 + v^3)\,\mathrm{d}v + (av^2 - 3v^3)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{a/2}^{0} -2v^3\,\mathrm{d}v \\ &= \left[-\frac{2v^4}{4}\right]_{a/2}^{0} \\ &= \frac{a^4}{32} \\ \int_{\mathrm{C}_3} \mathrm{P}\,\mathrm{d}u + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}v &= \frac{a^4}{32} \end{aligned}$$

En additionnant les intégrales le long de C_1, C_2 et C_3, on obtient
$$\oint_{Tri} \mathrm{P}\,\mathrm{d}u + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}v = \frac{a^4}{16}$$

On obtient à nouveau
$$\boxed{\iint_{S_4} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{S} = \frac{a^4}{8}}$$

4.c En additionnant les flux calculés à travers les surfaces S_1, S_2, S_3 et S_4, il vient
$$\boxed{\oiint_{T} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{S} = 0}$$

D'après le théorème de la divergence
$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\ \overrightarrow{f}\ \mathrm{d}\tau$$

où $\mathcal{V}$ est n'importe quel volume s'appuyant sur Σ.

Or ici on a
$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{f} = 0$$

On en déduit que le flux sortant de toute surface fermée est nul, d'où
$$\boxed{\oiint_{T} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{S} = 0}$$