UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies

MATMECA
Ecole d'Ingénieurs en Modélisation Mathématique et Mécanique

MATMECA 1 Epreuve d'Analyse Numérique

12 Janvier 2006
Durée 3 heures. Sans document.

EXERCICE 1

On considère une structure composée d'un ensemble de n masses reliées par des ressorts selon le schéma donné à la figure 1. Les ressorts ont une constante de rigidité égale à k et chacune des masses i, $1 \leq i \leq n$ ne peut se déplacer qu'horizontalement. La masse numérotée 0 est fixée et ne peut pas se déplacer. On applique sur chacune des masses i une force horizontale notée f_i. On note $u_i, 1 \leq i \leq n$, le déplacement (horizontal) de la masse i.

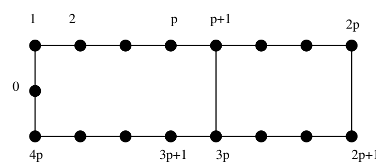

Fig. 1

Q 1 : On suppose que l'energie de déformation d'un ressort reliant deux masses j et i est donnée par

$$\frac{k}{2}(u_i - u_j)^2.$$

Montrer que l'équation définissant les déplacements d'équilibre est donnée par

$$d(i)k\ u_i - \sum_{j \in V(i)} k\ u_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

où $d(i)$ est le nombre de masses reliées à la masse i par un ressort et $V(i)$ est l'ensemble de ces masses.

Q 2 : On note $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ et $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$.
(i) Montrer que $\mathbf{u}$ est solution d'un système linéaire $n \times n$

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{2}$$

dont on écrira la matrice A.
(ii) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
(iii) On modifie le dispositif en laissant la masse 0 libre de se déplacer horizontalement. Montrer que l'équilibre du dispositif est alors défini par un système linéaire $(n + 1) \times (n + 1)$. Montrer que la matrice de ce système est semi-définie positive. Déterminer son noyau et donner une interprétation mécanique de ce noyau.

Q 3 : On suppose de nouveau que la masse 0 est fixée et ne se déplace pas. Écrire le graphe $G = (V, E)$ de la matrice A. On s'intéresse à la résolution de ce système par la méthode de factorisation de Choleski.
(i) Rappleller le principe général de la méthode (définition de L et D, decente et remontée).
(ii) Indiquer quel est le profil de la matrice A. Indiquer quels coefficients de la matrice L sont non nuls. Suggérez une struture de données adaptée à cette matrice pour tirer parti du creux dans la méthode de Choleski.

EXERCICE 2

On considère le système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3}$$

où A est une matrice rélle $n \times n$, réguière et telle que la matrice symétrique $A + A^T$ est définie positive, $\mathbf{b} \in I\!R^n$ est donné et $\mathbf{x} \in I\!R^n$ est l'inconnue. Pour résoudre ce système on suggère la méthode itérative suivante :

$\mathbf{x}^{(0)}$ arbitraire,
pour $k = 0$ jusqu'à convergence faire,
$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$,
$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$.
fin

Q 1 : Pour fabriquer une méthode de type descente, on choisit α_k de telle sorte que

$$||\mathbf{b} - A(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)})||^2 = \min\{||\mathbf{b} - A(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{r}^{(k)})||^2, \ \forall \alpha \in I\!R\}.$$

(i) Déterminer α_k.
(ii) Montrer que si α_k est choisi ainsi dans la méthode ci-dessus, alors

$$(\mathbf{r}^{(k+1)}, A\mathbf{r}^{(k)}) = 0. \tag{4}$$

Q 2 : On note $\mu > 0$ la plus petite valeur propre de la matrice $(A + A^T)/2$ et $\sigma = ||A||_2$. Montrer que

$$0 < \mu < \sigma$$

Q 3 : On cherche à montrer la convergence de la méthode ci-dessus avec le choix de α_k obtenu à la question (**Q 1**(i)).
(i) En utilisant (4) montrer que

$$||\mathbf{r}^{(k+1)}||^2 = ||\mathbf{r}^{(k)}||^2 - \alpha_k (A\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)}).$$

(ii) En déduire que

$$||\mathbf{r}^{(k+1)}||^2 = ||\mathbf{r}^{(k)}||^2 \left(1 - \frac{(A\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)})^2}{||\mathbf{r}^{(k)}||^2 ||A\mathbf{r}^{(k)}||^2}\right).$$

(iii) En conclure que

$$||\mathbf{r}^{(k+1)}||^2 \leq ||\mathbf{r}^{(k)}||^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{\sigma^2}\right),$$

et donc que la méthode est convergente.