Analyse numérique, Matmeca 1ère année Corrigé de la feuille 1[1]

1. Rappels fondamentaux d'algèbre linéaire

1.a Par définition, A est hermitienne si et seulement si

$$^t\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$$

Soit A une matrice symétrique : $^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$. On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \text{A est hermitienne} & \Longleftrightarrow & ^t\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \\ & \Longleftrightarrow & \overline{\mathrm{A}} = {}^t\mathrm{A} \\ & \Longleftrightarrow & \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \\ & \Longleftrightarrow & \text{A est réelle} \end{array}$$

1.b Si A est une matrice symétrique, alors

$$\langle \mathrm{A}x|y\rangle = {}^t\left(\overline{\mathrm{AX}}\right)\mathrm{Y} = {}^t\overline{\mathrm{X}}\,{}^t\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{Y} = {}^t\overline{\mathrm{X}}\,\overline{\mathrm{A}}\mathrm{Y} = \langle x|\overline{\mathrm{A}}y\rangle$$

> **Rappel** On dit qu'une matrice symétrique S est *définie positive* si
>
> $$\begin{array}{ll} 1. & \forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \qquad {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} \geqslant 0 \\ 2. & {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{X} = 0 \end{array}$$
>
> Une telle matrice peut permettre de définir un produit scalaire
>
> $$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY} \in \mathbb{R}$$

Si A est une matrice réelle quelconque, alors

$$\langle \mathrm{A}x|y\rangle = {}^t(\mathrm{AX})\,\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{Y} = \langle x|\,{}^t\mathrm{A}\,y\rangle$$

1.c Soit A une matrice symétrique définie positive. On a donc pour tout $\mathrm{X} \neq 0$

$$^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} > 0$$

En particulier, pour tout entier i inférieur à la dimension de A, si l'on choisit

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

le 1 étant situé à la i^{eme} position, on trouve

$$a_{i,i} > 0$$

$\boxed{\textbf{1.d}}$

> **Rappel**
> On appelle *matrice unitaire* toutes les matrices U telles que
>
> $$^{t}\overline{\mathrm{U}}\,\mathrm{U} = \mathrm{Id}$$
>
> les férus d'algèbre générale s'amuseront bien en montrant que l'ensemble des matrices unitaires forme un sous–groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
>
> On appelle *matrice orthogonale* toutes les matrices O telles que
>
> $$^{t}\mathrm{O}\,\mathrm{O} = \mathrm{Id}$$
>
> ...et l'ensemble des matrices orthogonales forme un sous–groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice unitaire (on fait l'exercice pour une matrice unitaire ; pour une matrice orthogonale, il suffit d'enlever les conjugaisons). On a

$$\|\mathrm{A}x\|_2^2 = {}^{t}\overline{\mathrm{AX}}\,\mathrm{AX} = {}^{t}\overline{\mathrm{X}}\;{}^{t}\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{AX} = {}^{t}\overline{\mathrm{X}}\,\mathrm{X} = \|\mathrm{X}\|_2^2$$

Par ailleurs, on sait que

$$\det \overline{\mathrm{A}} = \overline{\det \mathrm{A}}$$

et aussi que

$$\det {}^{t}\mathrm{A} = \det \mathrm{A}$$

En calculant le déterminant de l'égalité

$$^{t}\overline{\mathrm{U}}\,\mathrm{U} = \mathrm{Id}$$

on trouve

$$\overline{\det \mathrm{U}}\,\det \mathrm{U} = \det \mathrm{Id} = 1$$

soit

$$|\det \mathrm{U}| = 1$$

$\boxed{\textbf{1.e}}$ Soient A et B deux matrices semblables Il existe donc une matrice P inversible telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{B}$$

Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{B} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id}) &= \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id}) \\
&= \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} - \mathrm{XP}^{-1}\mathrm{P}) \\
&= \det(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id})\mathrm{P}) \\
&= \left(\det \mathrm{P}^{-1}\right) \det(\mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id})\,(\det \mathrm{P}) \\
\det(\mathrm{B} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id}) &= \det(\mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id})
\end{aligned}$$

car $\det \mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{P}}$. Les matrices A et B ont donc le même polynôme caractéristique.

$\boxed{\textbf{1.f}}$ Soit A une matrice hermitienne. Elle vérifie ${}^t\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$. Soit λ une valeur propre de A, et V un vecteur propre non nul associé à λ. On a ainsi

$$\mathrm{AV} = \lambda \mathrm{V}$$

On multiplie par ${}^t\overline{\mathrm{V}}$ pour trouver

$${}^t\overline{\mathrm{V}}\,\mathrm{AV} = \lambda \|\mathrm{V}\|_2^2$$

On prend la transposée de cette équation, puis on la conjugue, ce qui amène à

$${}^t\overline{\left({}^t\overline{\mathrm{V}}\,\mathrm{AV}\right)} = \overline{\lambda}\|\mathrm{V}\|_2^2$$

On simplifie le membre de gauche :

$${}^t\overline{\left({}^t\overline{\mathrm{V}}\,\mathrm{AV}\right)} = {}^t\left({}^t\mathrm{V}\,\overline{\mathrm{AV}}\right) = {}^t\overline{\mathrm{V}}\;{}^t\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{V} = {}^t\overline{\mathrm{V}}\,\mathrm{AV}$$

on trouve donc

$${}^t\overline{\mathrm{V}}\,\mathrm{AV} = \lambda\|\mathrm{V}\|_2^2 = \overline{\lambda}\|\mathrm{V}\|_2^2$$

Comme $\mathrm{V} \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$ c'est-à-dire que $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{1.g}}$

> **Rappel : Théorème spectral**
> Soit A un **opérateur auto–adjoint** sur un espace de dimension finie, c'est-à-dire qu'il peut s'identifier à :
>
> - une matrice symétrique dans la cas où l'espace vectoriel de base est $\mathbb{R}$; le produit scalaire est alors
>
> $$(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \longmapsto {}^t\mathrm{U}\,\mathrm{V}$$
>
> - une matrice hermitienne dans le cas où l'espace vectoriel de base est $\mathbb{C}$; le produit hermitien est alors
>
> $$(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \longmapsto {}^t\overline{\mathrm{U}}\,\mathrm{V}$$
>
> Alors
>
> 1. toutes les valeurs propres de A sont réelles
> 2. les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux
> 3. A est diagonalisable en base orthonormée
>
> (le résultat peut s'étendre au cas de la dimension infinie. Les deux premières propriétés sont toujours vraies, la troisième est fausse en général, mais vraie dans le cas où l'opérateur est *compact*, voir le cours d'analyse fonctionnelle de cette année ou de l'année prochaine)

Soit A une matrice symétrique réelle. Supposons que A soit définie positive. Alors pour tout vecteur X non nul on a ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} > 0$. En particulier, si X est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ, on trouve $\lambda\|\mathrm{X}\|^2 > 0$, soit $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons que A ait toutes ses valeurs propres positives.
Soit $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A (une telle base existe d'après le théorème spectral). Soit X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Comme $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ est une base, il existe n réels $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ tels que

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathrm{V}_i$$

En notant λ_i la valeur propre associée à V_i, on trouve

$${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mu_i^2 \|\mathrm{V}_i\|^2 \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si les μ_i sont tous nuls (c'est à dire si et seulement si $\mathrm{X} = 0$).

On a donc montré qu'une matrice symétrique réelle est définie positive, si et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.

$\boxed{\textbf{1.h}}$ Soient A et B deux matrices diagonalisables. On suppose qu'elles ont une base commune de vecteurs propres. Alors il existe une matrice de passage $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et deux matrices diagonales $\mathrm{D_A}$ et $\mathrm{D_B}$ telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_A}\mathrm{P} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_B}\mathrm{P}$$

On a alors

$$\mathrm{AB} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_A}\mathrm{P}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_B}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_A}\mathrm{D_B}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_B}\mathrm{D_A}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_B}\mathrm{P}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{D_A}\mathrm{P} = \mathrm{BA}$$

car deux matrices diagonales commutent toujours ; donc A et B commutent.

> Réciproquement, si deux matrices diagonalisables commutent, alors elles ont une base commune de vecteurs propres

Si on pose

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alors les matrices A et B sont diagonalisables (car elles ont deux valeurs propres distinctes), mais

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Normes vectorielles et normes matricielles

2.a

> **Rappel : définition d'une norme** Une **norme** sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une application de E vers $[\,0\,;+\infty\,[$ telle que
>
> $$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathrm{E} & \mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0 \\ \forall (x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathrm{E} & \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\,\mathrm{N}(x) \end{array}$$

1. **Norme** 1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- $$\begin{aligned} x = 0 &\iff \forall i \quad x_i = 0 \\ &\iff \forall i \quad |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \\ &\iff \|x\|_1 = 0 \end{aligned}$$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \qquad |x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$$

donc

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$$

soit

$$\|x+y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\lambda x\| = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda|\,|x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_1$$

donc $\|\cdot\|_1$ est une norme.

2. **Norme** ∞

- Supposons que $\|x\|_\infty = 0$. Alors $\max |x_i| = 0$, donc pour tout i, $x_i = 0$. On en déduit que $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$ alors $\|x\|_\infty = 0$
- Pour tout $x, y \in \mathrm{E}$ on a

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Il vient alors

$$\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

(par comparaison de $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, qui est un majorant quelconque de

$$\{|x_i + y_i| \quad i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]\}$$

et de $\|x+y\|_\infty$ qui est le plus petit des majorants)

- Pour tout $i \leqslant n$
$$|\lambda x_i| = |\lambda|\,|x_i|$$
on en déduit que
$$\max|\lambda x_i| = \max|\lambda|\,|x_i| = |\lambda|\max|x_i|$$
soit
$$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\,\|x\|_\infty$$

donc $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

3. **Norme** 2 Montrer « directement » que la norme 2 est une norme n'est pas vraiment très facile ; En revanche, on peut facilement montrer que cette norme dérive d'un produit scalaire, c'est-à-dire que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\|_2^2 = \langle x|x\rangle$$
où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

> **Rappel**
> Un *produit scalaire* sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une application de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ dans $\mathbb{K}$, que l'on note souvent $\langle\cdot|\cdot\rangle$
> (a) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est linéaire en chacune de ses variables
> (b) pour tout x dans E, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$ ($\langle\cdot|\cdot\rangle$ est *positive*)
> (c) $\langle x|x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$ (une forme bilinéaire vérifiant cette propriété et la précédente est dite *définie positive*).

> **Rappel : Inégalité de Cauchy–Schwarz**
> Étant donné un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur un espace vectoriel E, on a
> $$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad |\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|_2\|y\|_2$$
> Cette inégalité permet entre autres de montrer l'inégalité triangulaire pour toute norme dérivant d'un produit scalaire.

> **Théorème** (brillamment montré en TD)
> Si $(x,y)\mapsto\langle x|y\rangle$ est un produit scalaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E, alors $x\mapsto\sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme sur E.
>
> **Démonstration** Comme je suis très gentil, je rappelle comment on montre l'inégalité triangulaire. Soient deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$. On commence par développer la norme de $x+y$
> $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle$$
> D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
> $$|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$

d'où
$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$
soit, en prenant la racine carrée
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

2.b.i On a
$$\|x\|_\infty = \max|x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |x_i| = \|x\|_1$$
Par ailleurs pour tout i dans $[\![1\,;n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$. En sommant sur i, on en déduit que
$$\|x\|_1 \leqslant \mathrm{N}\|x\|_\infty$$
Finalement,
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \mathrm{N}\|x\|_\infty$$

2.b.ii De même que précédemment, on a
$$\max|x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \max|x_i|^2 = \mathrm{N}\max|x_i|^2$$
En prenant la racine carrée de cette série d'inégalités, on trouve
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{\mathrm{N}}\|x\|_\infty$$

2.b.iii On sait que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, et que cette inégalité est vraie pour une somme de N termes. On trouve ainsi
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sqrt{x_i^2} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |x_i| = \|x\|_1$$
Pour la seconde inégalité, on applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz au couple de vecteurs (u, v) avec :
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad u_i = |x_i| \qquad \text{et} \qquad v_i = 1$$
et on trouve :
$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |x_i| = \langle u|v\rangle \leqslant \|u\|_2\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} 1}\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |x_i|^2} = \sqrt{\mathrm{N}}\|x\|_2$$

Remarque
En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ça n'est pas le cas en dimension infinie.

2.c.i

Rappel
Soient deux espaces vectoriels, E et F chacun muni d'une norme, que l'on note respectivement $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$. On suppose que E est de dimension finie. Alors les applications linéaires de E dans F sont continues. De plus,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \sup_{\mathrm{X}\neq \mathrm{O}_{\mathrm{E}}} \dfrac{\|\mathrm{AX}\|_{\mathrm{F}}}{\|\mathrm{X}\|_{\mathrm{E}}} \end{array}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ (que l'on appelle norme subordonnée (aux normes $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$), ou norme induite (par les normes $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$), ou norme d'opérateur).

De telles normes ont un comportement vis à vis de la composition (ou de la multiplication de matrices) qui peut s'avérer précieux, en particulier :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \quad \forall \mathrm{X} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{AX}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{X}\|$$

et si on se donne trois espaces, $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ et deux applications linéaires, $\mathrm{A} : \mathrm{F} \mapsto \mathrm{G}$ et $\mathrm{B} : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$, chacun muni d'une norme. Alors

$$\|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

En particulier, si A est un endomorphisme,

$$\|\mathrm{A}^n\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^n$$

cette dernière inégalité est très utilisée pour justifier la convergence de séries de matrices (exponentielle de matrice par exemple).

Soit A une matrice carrée d'ordre n et notons $a_{i,j}$ ses coefficients. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ On a alors

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$$

Calculons et majorons $\|AX\|_1$

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_j \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j} x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}|\,|x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} |x_j| \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} |x_j| \left(\max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \right\} \right) \\
\|AX\|_1 &\leqslant \left(\max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \right\} \right) \sum_{j=1}^{N} |x_j|
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|AX\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \right\} \|X\|_1$$

Montrons à présent que ce majorant est atteint. Dans ce but, on calcule $\|AX_k\|_1$, où X_k est le k^{eme} vecteur de base de $\mathbb{R}^n$:

$$\|AX_k\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |a_{i,k}|$$

On choisit k tel que

$$\sum_{i=1}^{N} |a_{i,k}| = \max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \right\}$$

et pour ce k on a

$$\|AX_k\|_1 = \max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \right\} \|X_k\|_1$$

Finalement

$$\|A\|_1 = \max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}| \right\}$$

$\boxed{\textbf{2.c.ii}}$ On va essayer de majorer $\|AX\|_\infty$:

$$\|AX\|_\infty = \max_{i\in[\![1\,;\,N]\!]} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j} x_j|$$

Or on a, pour tout $i \in [\![1\,;\,N]\!]$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} |a_{i,j} x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| \max_{j\in[\![1\,;\,N]\!]} \{|x_j|\} = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| \\
\leqslant \|x\|_\infty \max_{i\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| \right\}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|AX\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty \max_{i\in[\![1\,;\,N]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| \right\}$$

soit

$$\|\mathrm{A}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{i,j}| \right\}$$

Notons i_0 l'entier tel que

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{i_0,j}| = \max_{i\in[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{i,j}|$$

et U le vecteur

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{signe}(a_{i_0,1}) \\ \mathrm{signe}(a_{i_0,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{signe}(a_{i_0,\mathrm{N}}) \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\mathrm{AU} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} a_{1,j}\,\mathrm{signe}(a_{i_0,j}) \\ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} a_{2,j}\,\mathrm{signe}(a_{i_0,j}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} a_{\mathrm{N},j}\,\mathrm{signe}(a_{i_0,j}) \end{pmatrix}$$

Pour tout k entier, on sait que

$$\left| \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} a_{k,j}\,\mathrm{signe}(a_{i_0,j}) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{k,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{i_0,j}|$$

avec égalité pour $k = i_0$. On a donc

$$\|\mathrm{AU}\|_\infty = \left(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{i_0,j}| \right) \|\mathrm{U}\|_\infty$$

Finalement

$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{i\in[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |a_{i,j}| \right\}$$

2.c.iii Soit B une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, les valeurs propres de B sont réelles, et B est diagonalisable en base orthonormée. Soit $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de B et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées aux V_i. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On décompose x dans la base des V_i :

$$x = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \mathrm{V}_i$$

On a alors

$$\langle \mathrm{B}x | x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \mathrm{V}_i | \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} x_j \mathrm{V}_j \rangle = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \lambda_i x_i^2$$

d'où

$$\lambda_{\min}(\mathrm{B}) \|x\|_2^2 \leqslant \langle \mathrm{B}x | x \rangle \leqslant \lambda_{\max}(\mathrm{B}) \|x\|_2^2$$

Soit A une matrice ; on applique l'inégalité trouvée à la matrice ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$, qui est bien symétrique :

$$\lambda_{\min}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) \leqslant \frac{\langle {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}x|x\rangle}{\|x\|_2^2} \leqslant \lambda_{\max}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$$

et comme

$$\langle {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}x|x\rangle = \langle \mathrm{A}x|\mathrm{A}x\rangle = \|\mathrm{A}x\|_2^2$$

on voit que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est positive ; en particulier, toutes ses valeurs propres sont positives, et

$$\frac{\|\mathrm{A}x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \sqrt{\lambda_{\max}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})}$$

avec égalité si x est vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ associé à sa plus grande valeur propre. Finalement

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})} = \sqrt{\rho({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})}$$

> **Rappel : rayon spectral**
> On appelle *rayon spectral* d'une matrice le réel positif
>
> $$\rho(\mathrm{A}) = \sup\{|\lambda| \qquad \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}$$

$\boxed{\textbf{2.c.iv}}$ Soit A une matrice, λ une valeur propre de A, et X un vecteur propre (non nul) associé à A : $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. On a donc

$$|\lambda|\,\|\mathrm{X}\| = \|\lambda\mathrm{X}\| = \|\mathrm{AX}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{X}\|$$

On en déduit

$$|\lambda| \leqslant \|\mathrm{A}\|$$

soit

$$\rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}\|$$

3. À PROPOS DES MATRICES TRIANGULAIRES

3.a On calcule le polynôme caractéristique de A, c'est à dire det (A − X Id) ; comme A − X Id est une matrice triangulaire, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(\mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{Id}) = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} (a_{i,i} - \mathrm{X})$$

Les valeurs propres de A sont donc les éléments diagonaux de A. En particulier, A est inversible, si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

3.b Le système $\mathrm{AX} = b$ est un système triangulaire, qui se résout en cascade : on commence par exprimer x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} b_1$$

Si on suppose connus $x_1, \ldots, x_k$, alors on peut connaître x_{k+1} par la formule

$$x_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1,k+1}} \left(b_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_{k,i} x_i \right)$$

Montrons à présent par récurrence sur n la propriété suivante

$$\mathscr{P}(k) \ : \ \text{« si } b_i = 0 \text{ pour } i < k \text{ alors } x_i = 0 \text{ pour } i < k \text{ »}$$

- $\underline{\mathscr{P}(2)}$ si $b_i = 0$ pour $i < 2$, alors $b_1 = 0$. On a donc $x_1 = \dfrac{1}{a_{1,1}} b_1 = 0$
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$ On suppose que pour tout $i < k+1$, $b_i = 0$. Alors par hypothèse de récurrence, $x_i = 0$ pour tout $i < k$. De plus

  $$x_k = \frac{1}{a_{k,k}} b_k = 0$$

  On en déduit que pour tout $i < k+1$, $b_i = 0$.
- <u>Conclusion</u> Pour tout $k \leqslant n$

  $$\forall i < k \quad b_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i < k \quad x_i = 0$$

Enfin, si on suppose que $b_i = 0$ pour $i < k$ et $b_k \neq 0$, alors d'après ce que l'on vient de montrer, $x_i = 0$ pour $i < k$. De plus

$$x_k = \frac{1}{a_{k,k}} b_k \neq 0$$

3.c Soient A et B deux matrices triangulaires inférieures. On note $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients respectifs de A et B. Notons $c_{i,j}$ les coefficients du produit de A par B.

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

On sait que si $j > i$, alors $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$.

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=j}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Si $j > i$, la première somme est nulle, car les $b_{k,j}$ sont nuls. De même, la seconde somme est nulle car les $a_{i,k}$ sont nuls. On en déduit que le produit AB est triangulaire inférieure si A et B sont triangulaires inférieures.

Si de plus, A est régulière, montrons que A^{-1} est triangulaire inférieure. On sait que la colonne C_i de la matrice A^{-1} vérifie $A^{-1}e_i = C_i$, où e_i est le i^{eme} vecteur de la base canonique. On en déduit que $AC_i = e_i$. D'après la question précédente, les $i-1$ premiers coefficients de C_i sont nuls. On en déduit que A^{-1} est triangulaire inférieure.

3.d

```
POUR i de 1 a N faire
     x(i)=b(i)/a(i,i)
     POUR j de 1 a i faire
          x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j)/a(i,i)
     Fin POUR j
Fin POUR i
```

4. Éléments propres du Laplacien

4.a On cherche les couples (λ, u) tels que

$$\left\{\begin{array}{l} -u''(x) = \lambda u(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x < \mathrm{L} \\ u(0) = u(\mathrm{L}) = 0 \end{array}\right.$$

Soit un couple (λ, u) solution de ce problème. On multiplie par u l'équation vérifiée par u :

$$\forall x \in \left]0\,;\mathrm{L}\right[\quad -u(x)u''(x) = \lambda u(x)^2$$

On intègre chacun des membres sur $\left]0\,;\mathrm{L}\right[$; pour le membre de gauche, on effectue l'intégration par parties suivante

$$-\int_0^{\mathrm{L}} u(x)u''(x)\,\mathrm{d}x = -\left[u(x)u'(x)\right]_0^{\mathrm{L}} + \int_0^{\mathrm{L}} u'(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{L}} u'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

d'où

$$\int_0^{\mathrm{L}} u'(x)^2 = \lambda \int_0^{\mathrm{L}} u(x)^2$$

donc si u n'est pas la fonction nulle, alors $\lambda \geqslant 0$.

> **Remarque**
> à titre d'exercice, on pourra s'amuser (car c'est très amusant) à montrer que si u est une fonction définie sur un ouvert Ω, $\mathscr{C}^2$ sur Ω, et $\mathscr{C}^0$ sur $\overline{\Omega}$, avec les conditions aux limites :
>
> $$u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega$$
>
> et vérifiant
>
> $$-\Delta u = \lambda u$$
>
> alors $\lambda \geqslant 0$. Pour cela, il suffit de revenir à la définition du Laplacien ($\Delta u = \operatorname{div}(\overrightarrow{\nabla} u)$), et d'utiliser la formule de Stokes.

On va maintenant chercher les solutions de

$$\forall x \in \left]0\,;\mathrm{L}\right[\qquad -u''(x) = \lambda u(x)$$

avec $\lambda > 0$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants, du second ordre, dont l'équation caractéristique est

$$r^2 + \lambda = 0$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont

$$r = \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda}$$

> Au niveau des notations, j'essaie de différencier i (en roman), qui est tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, et l'indice i (en italique).

les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \mathrm{K}_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + \mathrm{K}_2 \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right)$$

où K_1 et K_2 sont des réels quelconques.

On applique à présent les conditions aux limites. $u(0) = 0$ impose $\mathrm{K}_2 = 0$. $u(\mathrm{L}) = 0$ amène à $\mathrm{K}_1 = 0$ ou à $\sqrt{\lambda}\mathrm{L} = k\pi$, où k est un entier relatif. Finalement, les solutions du problème aux limites sont

$$\left\{ u \,:\, x \mapsto \mathrm{K}_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) \qquad \mathrm{K}_1 \in \mathbb{R} \quad \lambda = \frac{k^2\pi^2}{\mathrm{L}^2}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

4.b Dans l'énoncé, on propose d'effectuer l'approximation suivante

$$u'(ih) \approx \frac{u(ih + h/2) - u(ih - h/2)}{h}$$

En fait, en utilisant la formule de Taylor–Young, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u\left(ih + \dfrac{h}{2}\right) = u(ih) + \dfrac{h}{2}\, u'(ih) + \dfrac{h^2}{2}\, u''(ih) + \dfrac{h^3}{6}\, u^{(3)}(ih) + \mathrm{O}\left(h^4\right) \\ u\left(ih - \dfrac{h}{2}\right) = u(ih) - \dfrac{h}{2}\, u'(ih) + \dfrac{h^2}{2}\, u''(ih) - \dfrac{h^3}{6}\, u^{(3)}(ih) + \mathrm{O}\left(h^4\right) \end{array} \right.$$

d'où l'égalité

$$u'(ih) = \frac{u(ih + h/2) - u(ih - h/2)}{h} - \frac{h^2}{3}\, u^{(3)}(ih) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

ce qui justifie l'approximation proposée. Si on applique cette approximation à $u''(ih)$, on obtient

$$u''(ih) \approx \frac{u'\left(ih + \dfrac{h}{2}\right) - u'\left(ih - \dfrac{h}{2}\right)}{h}$$

on applique à nouveau cette approximation à chacun des deux termes trouvés :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'\left(ih + \dfrac{h}{2}\right) \approx \dfrac{u((i+1)h) - u(ih)}{h} \\ u'\left(ih - \dfrac{h}{2}\right) \approx \dfrac{u(ih) - u((i-1)h)}{h} \end{array} \right.$$

pour trouver finalement

$$u''(ih) \approx \frac{u((i+1)h) - 2u(ih) + u((i-1)h)}{h^2}$$

On s'intéresse donc au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{h^2}\left(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}\right) = \lambda u_i \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{M} \\ u_0 = u_{\mathrm{M}+1} = 0 \end{array} \right.$$

Ce problème se ramène à $\mathrm{A}\mathrm{U} = \lambda \mathrm{U}$ avec

$$\mathrm{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En prenant les $v_i^{(k)}$ définis dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} -v_{i-1}^{(k)} + 2v_i^{(k)} - v_{i+1}^{(k)} &= -\sin\left(\frac{k\pi(i-1)}{\mathrm{M}+1}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi i}{\mathrm{M}+1}\right) - \sin\left(\frac{k\pi(i+1)}{\mathrm{M}+1}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi i}{\mathrm{M}+1}\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi i}{\mathrm{M}+1}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{\mathrm{M}+1}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi i}{\mathrm{M}+1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{\mathrm{M}+1}\right)\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(\mathrm{M}+1)}\right)\sin\left(\frac{k\pi i}{\mathrm{M}+1}\right) \end{aligned}$$

Les vecteurs $v^{(k)}$ de coordonnées $v_i^{(k)} = \sin\left(\frac{k\pi i}{\mathrm{M}+1}\right)$, sont donc vecteurs propres de A, associés respectivement à la valeur propre $\lambda^{(k)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(\mathrm{M}+1)}\right)$.

D'après l'exercice 2, on voit que

$$\|\mathrm{A}\|_1 = \|\mathrm{A}\|_\infty = \frac{4}{h^2}$$

> **Rappel**
> Le **conditionnement** d'une matrice A pour une norme matricielle $\|\cdot\|$ donnée est défini par
> $$\mathrm{Cond}_{\|\cdot\|} = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\|$$

D'après l'exercice 2, pour une matrice symétrique définie positive,

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp(A)}} \lambda$$

on en déduit

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\mathrm{M}\pi}{2(\mathrm{M}+1)}\right)$$

Les valeurs propres de A^{-1} étant les inverses des valeurs propres de A, on a

$$\|\mathrm{A}^{-1}\|_2 = \frac{h^2}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2(\mathrm{M}+1)}\right)}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{A}) = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\mathrm{M}\pi}{2(\mathrm{M}+1)}\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2(\mathrm{M}+1)}\right)}$$

$\boxed{\textbf{4.c}}$ **Problème continu**

En reprenant le raisonnement de la question (a), si le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x < \mathrm{L} \\ u(0) = u'(\mathrm{L}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

admet une solution u non nulle, alors $\lambda \geqslant 0$. De plus, ces solutions sont de la forme

$$\forall x \in \,]\,0\,;\mathrm{L}\,[\qquad u(x) = \mathrm{K}_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + \mathrm{K}_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

La condition en 0 impose $\mathrm{K}_2 = 0$. En L, la condition $u'(\mathrm{L}) = 0$ donne

$$\mathrm{K}_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\mathrm{L}) = 0$$

soit $\mathrm{K}_1 = 0$, ou $\sqrt{\lambda}\mathrm{L} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est

$$\left\{x \mapsto \mathrm{K}_1 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2\mathrm{L}}\, x\right) \qquad \mathrm{K}_1 \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{N}\right\}$$

Problème discrétisé

Sur $]\,0\,;\mathrm{L}\,[$, la discrétisation du problème ne change pas. Au voisinage de L, on peut écrire

$$u(\mathrm{L}-h) = u(\mathrm{L}) - hu'(\mathrm{L}) + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

et on a $u(\mathrm{L}-h) = u_{\mathrm{M}}$ et $u(\mathrm{L}) = u_{\mathrm{M}+1}$. Comme on veut $u'(\mathrm{L}) = 0$, on impose $u_{\mathrm{M}+1} = u_{\mathrm{M}}$. On trouve donc

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}\left(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}\right) = \lambda u_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{M} \\ u_0 = 0 \\ u_{\mathrm{M}+1} = u_{\mathrm{M}} \end{cases}$$

Le problème discrétisé se ramène à

$$\mathrm{A}u = \lambda u$$

avec

$$\mathrm{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin de calculer le spectre de $h^2\mathrm{A}$, on commence par calculer sa norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$. D'après l'exercice 2, on trouve $\|h^2\,\mathrm{A}\|_\infty = 4$. D'après l'exercice 2, cela veut dire que $|\lambda| \leqslant 4$. La matrice A est symétrique ; montrons qu'elle est positive.

> **Remarque : Théorème de Gershgörin** (qui sera vu un peu plus loin dans le cours, lors des méthodes itératives)
> Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note $a_{i,j}$ ses coefficients. Les valeurs propres de la matrice A sont situées dans la réunion des disques $\mathcal{D}_i$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\mathrm{R}_i = \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

Appliquons le théorème de Gershgörin : les $a_{i,i}$ sont égaux à 2, sauf $a_{n,n}$ qui est égal à 1. Les R_i sont égaux à 2 sauf $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_\mathrm{N} = 1$. Finalement :

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(2,1) \qquad \mathcal{D}_i = \mathcal{D}(2,2) \qquad \mathcal{D}_i = \mathcal{D}(1,1)$$

d'où l'on déduit

$$\cup\, \mathcal{D}_i = \mathcal{D}(2,2)$$

De plus, A étant symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Donc les valeurs propres de A sont dans l'intersection de la droite réelle avec $\mathcal{D}(2,2)$, c'est-à-dire dans $[\,0\,;4\,]$. En particulier, A est positive.

> On peut également montrer « directement » que A est définie positive ${}^t(x_1, x_2 \ldots, x_\mathrm{M})$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^\mathrm{M}$
>
> $$h^2\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \\ \vdots \\ -x_{\mathrm{M}-2} + 2x_{\mathrm{M}-1} - x_\mathrm{M} \\ -x_{\mathrm{M}-1} + x_\mathrm{M} \end{pmatrix}$$
>
> On en déduit
>
> $$h^2\,{}^t\mathrm{X\,AX} = x_1(2x_1 - x_2) + \sum_{i=2}^{\mathrm{M}-1} x_i(-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}) + x_\mathrm{M}(-x_{\mathrm{M}-1} + x_\mathrm{M})$$
>
> La principe est de refaire ce qui a été fait au niveau continu : on avait effectué une intégration par parties, afin de faire apparaître l'intégrale de $(u')^2$. Ici, on va donc torturer la somme, afin de faire apparaître $(x_i - x_{i-1})^2$ (qui est le pendant discret de $(u')^2(x_i)$). Ce type de transformation est connu sous le nom de « transformation d'Abel » :
>
> $$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\mathrm{M}-1} x_i(-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}) &= \sum_{i=2}^{\mathrm{M}-1} x_i(x_i - x_{i-1} - (x_{i+1} - x_i)) \\ &= \sum_{i=2}^{\mathrm{M}-1} x_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=2}^{\mathrm{M}-1} x_i(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=2}^{\mathrm{M}-1} x_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=3}^{\mathrm{M}} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=3}^{\mathrm{M}-1} (x_i - x_{i-1})^2 + x_2(x_2 - x_1) \\ &\quad -x_{\mathrm{M}-1}(x_\mathrm{M} - x_{\mathrm{M}-1}) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} h^2\,{}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} = {} & x_1(2x_1 - x_2) + \sum_{i=3}^{\mathrm{M}-1}(x_i - x_{i-1})^2 + x_2(x_2 - x_1) \\ & -x_{\mathrm{M}-1}(x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{M}-1}) + x_{\mathrm{M}}(-x_{\mathrm{M}-1} + x_{\mathrm{M}}) \end{aligned}$$

d'où

$$h^2\,{}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} = x_1^2 + \sum_{i=2}^{\mathrm{M}}(x_i - x_{i-1})^2 > 0$$

On cherche à présent les valeurs propres de A : on note u_i les coordonnées d'un vecteur propre de $h^2\mathrm{A}$ associé à une valeur propre λ. Alors la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire suivante

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = \lambda u_i$$

l'équation caractéristique de cette récurrence linéaire est

$$r^2 - (2-\lambda)r + 1 = 0$$

dont le discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (2-\lambda)^2 - 4 \\ &= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda(\lambda - 4) \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [\,0\,;4\,]$, on voit que $\Delta \leqslant 0$. On en déduit qu'il existe ω tel que $\Delta = (\mathrm{i}\omega)^2$. On a donc

$$u_n = \mathrm{A}\cos(n\omega) + \mathrm{B}\sin(n\omega)$$

On a fixé $u_0 = 0$, donc on a $\mathrm{A} = 0$, soit

$$\exists \mathrm{B} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \mathrm{B}\sin(n\omega)$$

Par ailleurs, la condition à la limite M impose $u_{\mathrm{M}} = u_{\mathrm{M}+1}$, soit $\mathrm{B}\sin(\mathrm{M}\omega) = \mathrm{B}\sin((\mathrm{M}+1)\omega)$. On en déduit

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\left(\mathrm{M} + \frac{1}{2}\right)\omega\right) = 0$$

Cela impose donc

$$\begin{aligned} &\text{soit} \qquad \exists k \in \mathbb{N} \quad \omega = 2k\pi \\ &\text{soit} \qquad \exists k \in \mathbb{N} \quad \omega = \frac{\pi}{2\mathrm{M}+1} + \frac{2k\pi}{2\mathrm{M}+1} \end{aligned}$$

La première solution donne un vecteur nul. Finalement A admet M valeurs propres distinctes qui sont les réels de la forme $\lambda = 4\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2\mathrm{M}+1}\right)$. En particulier

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2\mathrm{M}+1}\right) \\ \lambda_{\max} &= 4\sin^2\left(\frac{(2k_0+1)\pi}{2\mathrm{M}+1}\right) \end{aligned}$$

où $k_0 = \left\lfloor \frac{\mathrm{M}}{2} \right\rfloor$. De même qu'auparavant,

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

et

$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \|\mathrm{A}\|_1 = 4$$

5. Conditionnement

5.a.i Par définition,

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{Id}$$

on sait que pour toute norme matricielle, $\| \mathrm{Id} \| = 1$. On en déduit

$$1 = \| \mathrm{Id} \| = \|\mathrm{AA}^{-1}\| \leqslant \|\mathrm{A}\| \|\mathrm{A}^{-1}\| = \mathrm{cond}(\mathrm{A})$$

De plus, pour tout α réel non nul, $(\alpha \mathrm{A})^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{A}^{-1}$, donc

$$\mathrm{Cond}(\alpha \mathrm{A}) = \|\alpha \mathrm{A}\| \|(\alpha \mathrm{A})^{-1}\| = |\alpha| \, \|\mathrm{A}\| \left|\frac{1}{\alpha}\right| \|\mathrm{A}^{-1}\| = \|\mathrm{A}\| \|\mathrm{A}^{-1}\| = \mathrm{Cond}(\mathrm{A})$$

5.a.ii La norme 2 de la matrice A ne change pas lorsqu'on change de base orthonormée. En effet, si P est une matrice orthogonale,

$$\|\mathrm{PX}\|_2^2 = {}^t(\mathrm{PX})\,\mathrm{PX} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{PX} = \|\mathrm{X}\|_2^2$$

et

$$\| {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX}\|_2^2 = {}^t\left({}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX}\right) {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{APX}$$

Finalement, pour tout $\mathrm{X} \neq 0$

$$\frac{\| {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX}\|_2^2}{\|\mathrm{X}\|_2^2} = \frac{{}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{APX}}{\|\mathrm{X}\|_2^2} = \frac{{}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{APX}}{\|\mathrm{PX}\|_2^2} = \frac{\|\mathrm{APX}\|_2^2}{\|\mathrm{PX}\|_2^2}$$

On en déduit

$$\sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\| {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX}\|_2^2}{\|\mathrm{X}\|_2^2} = \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|\mathrm{APX}\|_2^2}{\|\mathrm{PX}\|_2^2} = \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|\mathrm{AX}\|_2^2}{\|\mathrm{X}\|_2^2}$$

soit $\| {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{AP}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormée de diagonalisation de A, et $\lambda_1, \dots \lambda_\mathrm{N}$ les valeurs propres de A.

$${}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{APX} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \lambda_i x_i^2 \leqslant \max|\lambda(\mathrm{A})| \, \|x\|_2^2$$

avec égalité si x est vecteur propre de A associé à la valeur propre de plus grand module. On en déduit

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \max|\lambda(\mathrm{A})|$$

Par ailleurs, les valeurs propres de A^{-1} étant les inverses des valeurs propres de A, on trouve

$$\|\mathrm{A}^{-1}\|_2 = \max\left|\frac{1}{\lambda(\mathrm{A}^{-1})}\right| = \frac{1}{\min|\lambda(\mathrm{A})|}$$

Finalement

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{A}) = \frac{\max|\lambda(\mathrm{A})|}{\min|\lambda(\mathrm{A})|}$$

5.a.iii U est une matrice orthogonale, donc elle préserve la norme 2 :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \qquad \|\mathrm{UX}\|_2 = \|\mathrm{X}\|_2$$

on en déduit que

$$\|\mathrm{U}\|_2 = 1$$

et de même

$$\| {}^t\mathrm{U} \|_2 = \|\mathrm{U}^{-1}\|_2 = 1$$

on en déduit

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{U}) = 1$$

Pour toute matrice A,

$$\|\mathrm{UAX}\|_2 = \|\mathrm{AX}\|_2$$

On en déduit que

$$\|\mathrm{UA}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2$$

Montrons de même que $\|\mathrm{AU}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2$. On a

$$\|\mathrm{AUX}\|_2 \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{UX}\| = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{X}\|$$

donc $\|\mathrm{AU}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|$. Soit X_0, de norme 1, tel que $\|\mathrm{AX}_0\| = \|\mathrm{A}\|$. Alors $\| {}^t\mathrm{UX}_0 \| = 1$ et

$$\|(\mathrm{AU})({}^t\mathrm{U}\,\mathrm{X}_0)\| = \|\mathrm{AX}_0\| = \|\mathrm{A}\|$$

Le vecteur ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{X}_0$ est donc tel que l'inégalité $\|\mathrm{AUX}\|_2 \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{X}\|$ est atteinte, donc

$$\|\mathrm{AU}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2$$

D'après ce que l'on vient de faire

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{UA}) = \|\mathrm{UA}\|_2\|(\mathrm{UA})^{-1}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2\|\mathrm{A}^{-1}\,{}^t\mathrm{U}\,\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2\|\mathrm{A}^{-1}\|_2 = \mathrm{Cond}_2(\mathrm{A})$$

De même

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{AU}) = \|\mathrm{AU}\|_2\|(\mathrm{AU})^{-1}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2\|\,{}^t\mathrm{U}\,\mathrm{A}^{-1}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_2\|\mathrm{A}^{-1}\|_2 = \mathrm{Cond}_2(\mathrm{A})$$

5.b On a

$$(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})(x + \delta x) = \mathrm{A}x + \mathrm{A}\delta x + \delta\mathrm{A}x + \delta\mathrm{A}\delta x$$

Comme $(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})(x + \delta x) = b$, et que $\mathrm{A}x = b$ on trouve

$$\mathrm{A}\delta x + \delta\mathrm{A}(x + \delta x) = 0$$

Ou encore

$$\delta x = -\mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A}(x + \delta x)$$

d'où

$$\|\delta x\| \leqslant \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\|\|x + \delta x\|$$

on en déduit

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leqslant \mathrm{Cond}(\mathrm{A})\frac{\|\delta\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}$$

On récrit l'égalité trouvée sous la forme

$$\delta \mathrm{A}x + \mathrm{A}(\mathrm{Id} + \mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})\delta x = 0$$

que l'on peut encore écrire

$$\delta x = (\mathrm{Id} + \mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A}x$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \mathrm{Cond}(\mathrm{A})\frac{\|\delta\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}\|(\mathrm{Id} + \mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})^{-1}\|$$

Il reste à majorer $\|(\mathrm{Id} + \mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})^{-1}\|$. On sait que

$$(\mathrm{Id} + \mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})^n$$

d'où

$$\|(\mathrm{Id} + \mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A})^{-1}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|\mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A}\|^n = \frac{1}{1-\|\mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A}\|}$$

Finalement on trouve

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \mathrm{Cond}(\mathrm{A})\frac{\|\delta\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}\frac{1}{1-\|\mathrm{A}^{-1}\delta\mathrm{A}\|}$$

5.c Exemple du conditionnement d'une matrice non symétrique

On s'intéresse à la matrice suivante

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin de calculer l'inverse de A, on essaie de résoudre le système AX = Y. On note x_i et y_i les composantes des vecteurs X et Y. On a alors les égalités suivantes

$$\begin{cases} x_i + 2x_{i+1} = y_i & \forall i \in [\![1\,;\mathrm{N}-1]\!] \\ y_\mathrm{N} = x_\mathrm{N} \end{cases}$$

On peut commencer par calculer les dernières composantes de X :

$$x_{\mathrm{N}-1} = y_{\mathrm{N}-1} - 2y_\mathrm{N}$$

ce qui permet de calculer

$$x_{\mathrm{N}-2} = 4y_\mathrm{N} - 2y_{\mathrm{N}-1} + y_{\mathrm{N}-2}$$

on peut ensuite calculer $x_{\mathrm{N}-3}$:

$$x_{\mathrm{N}-3} = -8y_\mathrm{N} + 4y_{\mathrm{N}-1} - 2y_{\mathrm{N}-2} + y_{\mathrm{N}-3}$$

Intuitivement, on voit que $(\mathrm{A}^{-1})_{i,j} = \chi_{j\geqslant i}(-2)^{j-i}$ ($\chi_{j\geqslant i}$ est telle que $\chi_{j\geqslant i}(i,j) = 1$ si $j \geqslant i$ et $\chi_{j\geqslant i}(i,j) = 0$ sinon). Montrons ce résultat par récurrence sur N (la dimension de A). On va noter A_N la matrice définie dans l'énoncé, et de dimension N. Notons

$$\mathscr{P}(\mathrm{N}) \ : \ \text{« l'inverse de } \mathrm{A_N} \text{ a pour coefficients } \chi_{j\geqslant i}(-2)^{j-i} \text{ »}$$

- $\mathscr{P}(1)$ Dans ce cas, la matrice $\mathrm{A_N}$ est réduite à un seul coefficient, et le résultat est évident.
- $\mathscr{P}(\mathrm{N}) \Longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{N}+1)$ On suppose que $\mathscr{P}(\mathrm{N})$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(\mathrm{N}+1)$ est vraie également. Pour inverser $\mathrm{A_{N+1}}$, on pose le système

  $$\mathrm{A_{N+1}X = Y}$$

  on en résout les N dernières lignes à l'aide de l'hypothèse de récurrence :

  $$\forall i \in [\![\, 2\,;\, \mathrm{N}+1 \,]\!] \qquad x_i = \sum_{k=i}^{\mathrm{N}+1} (-2)^{k-i} y_k$$

  en particulier,

  $$x_2 = \sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1} (-2)^{k-2} y_k$$

  on en déduit x_1 :

  $$x_1 = y_1 - 2x_2 = y_1 - 2\sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1} (-2)^{k-2} y_k = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} (-2)^{k-1} y_k$$

  on en déduit que la première ligne de $\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}^{-1}$ vérifie aussi la formule de récurrence, d'où $\mathscr{P}(\mathrm{N}+1)$.
- Conclusion

  $$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \qquad (\mathrm{A_N^{-1}})_{i,j} = \chi_{j\geqslant i}(-2)^{j-i}$$

La matrice A étant triangulaire supérieure, on lit ses valeurs propres sur la diagonale, donc 1 est la seule valeur propre de A.

En utilisant les résultats de l'exercice 2, on voit que

$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \|\mathrm{A}\|_1 = 3$$

et que

$$\|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty = \|\mathrm{A}^{-1}\|_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} 2^i = 2^{\mathrm{N}} - 1$$

On en déduit

$$\mathrm{Cond}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{Cond}_\infty(\mathrm{A}) = 3(2^{\mathrm{N}} - 1)$$

Afin de déterminer la majoration sur le conditionnement en norme 2, on va utiliser l'équivalence des normes ; en effet, d'après ce qu'on a vu à l'exercice 2

$$\|\mathrm{A}x\|_1 \leqslant \sqrt{\mathrm{N}}\|\mathrm{A}x\|_2 \leqslant \sqrt{\mathrm{N}}\|\mathrm{A}\|_2\|x\|_2 \leqslant \sqrt{\mathrm{N}}\|\mathrm{A}\|_2\|x\|_1$$

on en déduit que

$$\|\mathrm{A}\|_1 \leqslant \sqrt{\mathrm{N}}\|\mathrm{A}\|_2$$

d'où

$$\begin{cases} \|\mathrm{A}\|_2 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,\|\mathrm{A}\|_1 \\ \|\mathrm{A}^{-1}\|_2 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,\|\mathrm{A}^{-1}\|_1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{A}) \geqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{Cond}_1(\mathrm{A})$$

soit

$$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{A}) \geqslant \frac{3}{\mathrm{N}}\,(2^{\mathrm{N}} - 1)$$

> On voit dans ce cas que la norme 2 de A est bien loin du rapport de la plus grande valeur propre sur la plus petite (qui est ici égal à 1). Le résultat de la question (*a.ii*),
>
> $$\mathrm{Cond}_2(\mathrm{A}) = \frac{\max|\lambda(\mathrm{A})|}{\min|\lambda(\mathrm{A})|}$$
>
> n'est donc vrai que dans le cas où A est symétrique.