Étude de deux exemples

Exercice 1
Pendule simple

On considère l'équation non linéaire suivante

$$x'' + \sin(x) = 0 \tag{1}$$

1. Mettre l'équation (1) sous la forme d'un système du premier ordre, non linéaire autonome 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \mathrm{F}(x, y) \tag{2}$$

2. Déterminer les points d'équilibre , c'est à dire les points (x_0, y_0) tels que

$$\mathrm{F}(x_0, y_0) = 0$$

3. On note F_1 et F_2 les composantes de F. Tracer les isoclines nulles, c'est à dire les courbes telles que $\mathrm{F}_1(x, y) = 0$ ou $\mathrm{F}_2(x, y) = 0$. Tracer les vecteurs vitesse le long de ces isoclines nulles.
4. Selon les régions du plan, tracer la direction du vecteur vitesse $\overrightarrow{\mathrm{V}}(x', y')$.
5. Trouver une intégrale première du système, c'est à dire une fonction G, de deux variables, telle que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{G}(x(t), y(t)) = 0$.
6. Effectuer un tracé (approximatif) des orbites de (2), en traçant les courbes G = C, où C est un réel (on différenciera deux cas pour ces courbes de niveau).

Exercice 2
Système de Volterra–Lotka

On considère le système différentiel suivant (modélisant l'évolution d'un système prédateur–proie)

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x(1 - y) \\ y' = y(x - 1) \end{array} \right. \tag{3}$$

1. Chercher les points d'équilibre du système
2. Chercher les solutions incluses dans l'axe $x = 0$ et dans l'axe $y = 0$. On admet le Théorème de Cauchy–Lipschitz. Montrer que la solution du problème de Cauchy, défini par le système (3), et les conditions de Cauchy $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ où $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ est tel que pour tout t, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
3. Tracer les isoclines nulles du système, et régionner le quart de plan $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ selon les signes de x' et de y'. Dans chacune de ces régions, tracer la direction du vecteur vitesse, ainsi que le long des isoclines.
4. On admet le théorème suivant, qui sera montré au chapitre 4 du cours.

> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, et $t \mapsto x(t)$ la solution maximale du problème de Cauchy associé. On note I l'intervalle maximal de définition de x. Si $\sup \mathrm{I} < +\infty$, alors x sort de tout compact de Ω.

On note

- $\mathrm{I} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad 0 < y < 1\Big\}$
- $\mathrm{II} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x > 1 \quad \text{et} \quad 0 < y < 1\Big\}$
- $\mathrm{III} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x > 1 \quad \text{et} \quad y > 1\Big\}$

- $\mathrm{IV} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad y > 1\Big\}$

   On suppose que les solutions de I restent dans I. Montrer que dans ce cas, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Montrer ensuite que x et y admettent des limites en $+\infty$, et montrer que ces limites sont nécessairement des points d'équilibre du système. Aboutir à une contradiction.

5. Faire de même pour IV.
6. On choisit une orbite de II, et on suppose qu'elle reste dans 2. Montrer que x est borné, puis que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, et aboutir de même à une contradiction. Faire de même pour la région III.
7. Montrer que $(x, y) \longmapsto \log(x) + \log(y) - x - y$ est une intégrale première du système.
8. Montrer que $f\,:\, u \mapsto \log(u) - u - 1$ est bijective de $[\,1\,; {+\infty}\,[$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que les solutions de (3) sont périodiques.
9. Faire un tracé des solutions.