Systèmes et équations différentielles linéaires

Systèmes linéaires à coefficients constants

On rappelle les principales méthodes de résolution d'un système différentiel.

1. On réduit A sous une forme simple (idéalement, diagonale, si A est diagonalisable, mais sinon, triangulaire), et on calcule ainsi les puissances de A, puis l'exponentielle de $t\mathrm{A}$.
2. On calcule la décomposition de Dunford de A, $\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$, avec D diagonalisable, N nilpotente, et où D et N commutent. On calcule les puissances de A à l'aide du binôme de Newton (puisque D et N commutent !), et la somme resultante a un nombre de termes au plus égal à l'indice de nilpotence de N. Il reste à calculer les puissances de D, ce qui est plus simple que de calculer les puissances de A. La connaissance des puissances de A permet ensuite de calculer $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$.
3. on utilise un polynôme annulateur de A pour calculer les puissances de A ; soit P un tel polynôme. On commence par écrire la division euclidienne de X^n par P :
$$\exists \mathrm{Q}_n, \mathrm{R}_n \qquad \mathrm{X}^n = \mathrm{Q}_n(\mathrm{X})\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{R}_n(\mathrm{X})$$
avec $\mathrm{d}^\circ(\mathrm{R}_n) < \mathrm{d}^\circ(\mathrm{P})$. On calcule ensuite les coefficients de R_n, et en évaluant l'expression pour la matrice A, on trouve $\mathrm{A}^n = \mathrm{R}_n(\mathrm{A})$. On obtient ainsi A^n exprimé dans la famille des A^i, $i = 0 \ldots p-1$, où p est le degré du polynôme P, et on en déduit $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'on ne change pas de corps.
4. on triangule le système, que l'on résout ensuite en cascade.

Exercice 1
Résoudre les systèmes différentiels de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 \\ -1 & -2 & -20 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -18 & 27 \\ -3 & \frac{7}{2} & -6 \\ -4 & 7 & -11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 12 & -10 & 5 \\ 10 & -8 & 5 \\ -10 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Résoudre les systèmes suivants

1. Piège : la matrice n'est pas diagonalisable...
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
2. Piège : la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, seulement dans $\mathbb{C}$
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 13 & -6 & 6 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
Soit A un opérateur de $\mathbb{R}^n$, et $X' = AX$ le système différentiel associé.

1. on suppose que A laisse un sous espace E invariant. Montrer que si φ est une solution de condition initiale $\varphi(t_0) \in E$, alors $\varphi(t) \in E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire des solutions du système si A est nilpotente ? Réciproque ?
3. On suppose que A a une valeur propre de partie réelle strictement négative. Montrer qu'il existe au moins une solution φ non nulle telle que $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
4. À quelles conditions le système n'a-t-il que des solutions bornées ?
5. Soit A une matrice réelle $n \times n$ telle que
$$\sigma(A) \subset \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda) \leqslant -a < 0 \Big\}$$
Montrer que pout tout $b < a$, il existe $C > 0$ tel que
$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|e^{tA}\| \leqslant Ce^{-bt}$$

Exercice 4
Soit P un polynôme complexe de degré n dont les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ sont simples.

1. Écrire l'équation $P(D)x = 0$ (où D désigne le morphisme de dérivation) sous la forme d'un système differentiel du premier ordre
2. Résoudre le système

Classification dans $\mathbb{R}^2$ des systèmes linéaires

Exercice 5
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$
2. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R},$$
et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continue.
3. $x'' = a^2 x$, $\quad x(0) = x_0$, $\quad x'(0) = x_1$, $\quad x_0, x_1, a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. Donner la solution dans les cas $a \in \mathbb{R}^*$ et $a = ib$, $b \in \mathbb{R}^*$.
4. $x'' = a^2 x + f(t)$, $\quad x(0) = x_0$, $\quad x'(0) = x_1$, $\quad x_0, x_1, a \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Exercice 6
Classifier et equisser dans $\mathbb{R}^2$ les portraits de phase des équations $X' = AX$, pour $A \in M_2(\mathbb{R})$ ayant 0 comme valeur propre.

Exercice 7
Dans les systèmes suivants, pour quelle(s) valeur(s) de k l'origine est-elle un puit pour l'équation $X' = AX$?
$$\begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ k & -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Exercice 8
Donner l'allure des orbites des systèmes linéaires suivants

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-y \\ y' & = & 2x+3y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x+4y \\ y' & = & -9x+y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-2y \\ y' & = & -3x+2y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x+2y \\ y' & = & x+y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x+2y \\ y' & = & -2x+3y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -2x+y \\ y' & = & -x-4y \end{array}\right.$$

COEFFICIENTS NON CONSTANTS

Exercice 9
Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est la résolvante du système linéaire $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)$, avec

$$\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1-\sin(2t) \\ 1-\sin(2t) & -2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

En déduire la solution du système $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}\mathrm{X}(t) + \mathrm{B}(t)$, avec $\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos t \\ \mathrm{e}^{-t}\sin t \end{pmatrix}$

Exercice 10
On considère l'équation différentielle linéaire suivante sur $\mathbb{R}^n$

$$y' = \mathrm{A}(t)y$$

où A est continue sur un intervalle I.

1. Montrer que si l'on suppose que $\mathrm{A}(t)\mathrm{A}(t') = \mathrm{A}(t')\mathrm{A}(t)$ pour tout $t, t' \in \mathrm{I}$, la résolvante du système est

$$\mathrm{R}(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(s)\,\mathrm{d}s\right) =: \exp(\mathrm{B}(t))$$

$\Big($On montrera que pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$ $\;\mathrm{B}(t)\mathrm{B}(t') = \mathrm{B}(t')\mathrm{B}(t)$ $\Big)$

2. Montrer que si $\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix}$ alors A vérifie l'hypothèse de la question précédente, et $\mathrm{B}(t)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix}$
3. Résoudre l'équation $y' = \mathrm{A}(t)y$ lorsque $a(t) = -\dfrac{t}{2(1+t^2)}$ et $b(t) = \dfrac{1}{2(1+t^2)}$.
4. Résoudre l'équation $y' = \mathrm{A}(t)y + \mathrm{C}(t)$ lorsque $\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(t) & 1 \\ -1 & \mathrm{sh}(t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C}(t) = \begin{pmatrix} \sin t\,\mathrm{sh}(t) \\ \cos t\,\mathrm{sh}(t) \end{pmatrix}$

Exercice 11
Soit $x(t)$ solution de $x' = \Big(\mathrm{A} + \mathrm{B}(t)\Big)x, \qquad x(0) = x_0$ avec $\sigma(\mathrm{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$.

1. Montrer qu'il existe $b > 0$, $\mathrm{C} > 0$ tel que pour $t \geqslant 0$:

$$e^{bt}\|x(t)\| \leqslant \mathrm{C}\|x_0\| e^{\int_0^t \mathrm{C}\|\mathrm{B}(s)\|ds}.$$

2. On suppose de plus :
$$\int_0^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\| ds < \infty.$$
Montrer que les solutions de $x' = \Big(\mathrm{A} + \mathrm{B}(t)\Big)x$ sont asymptotiquement stables.

Exercice 12
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c, q des fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, telles que a ne s'annule pas sur I.

1. On considère les équations différentielles suivantes :
$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{1}$$
$$y'' + q(t)y = 0 \tag{2}$$
Montrer qu'en faisant un changement de fonction inconnue on peut ramener la résolution de (1) à la résolution de (2) ; on donnera l'expression de q en fonction de a, b, c.
2. On étudie les zéros des solutions de (2)
   (a) Montrer que les zéros de (2) sont isolés.
   (b) Soient x_1 et x_2 deux solutions indépendantes de (2). En étudiant le wronskien de (2), montrer qu'entre deux zéros consécutifs de x_1, il existe un et un seul zéro de x_2.
   (c) Soient x_1 et x_2 des solutions respectives de
   $$x'' + q_1(t)x = 0 \tag{3a}$$
   $$x'' + q_2(t)x = 0 \tag{3b}$$
   En étudiant $x_1x_2' - x_2x_1'$, montrer qu'entre deux zéros consécutifs de x_1, il existe au moins un zéro de x_2.
   (d) Soit x une fonction non nulle de (2) ; établir que
   - si q est à valeurs négatives, alors x s'annule au plus une fois sur I
   - Si q est minorée par $m > 0$ sur $[\, t_0\,; +\infty\,[$, alors x s'y annule une infinité de fois.
3. Montrer que les fonctions de Bessel, c'est à dire les solutions développables en séries entières de
$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0 \qquad (\mathbf{E_n})$$
ont une infinité de zéros.

Non–linéaire se ramenant au linéaire

Exercice 13
On considère l'équation suivante :
$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$$
où α est un réel différent de 1. Montrer que la fonction nulle est la seule fonction s'annulant sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'à l'aide d'un changement de fonction inconnue, on peut se ramener à une équation différentielle linéaire.
Application : Résoudre
$$x^2y' + y^2 - y = 0$$
(Ce type d'équation est appelé « équations de Bernouilli »)

Exercice 14
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}'(t) = f(\mathrm{X}) \tag{4}$$

1. Soit F un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω vers Ω' (où Ω et Ω' sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$). Si φ est une solution du système (4), trouver une équation différentielle vérifiée par $\psi = \mathrm{F} \circ \varphi$.
2. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$\mathrm{F} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2^2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, tel que $\mathrm{F}(0) = 0$.
3. Déduire à l'aide des questions précédentes les solutions du système différentiel suivant
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2^2) - 2x_2 + x_3 + 2x_2(x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3 \\ 2(x_1 - x_2^2) + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

EDPs se ramenant à une EDO linéaire

Exercice 15
Soient $u_0, u_1 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions à support compact. Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles suivantes.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(0,x) = u_0(x)\,, \quad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(0,x) = u_0(x)\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)\,, \quad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$

(Utiliser la transformée de Fourier en x.)

Problème

I. Commandabilité

Dans cette partie, on se donne une paire (A, B), constituée d'une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. À cette paire, on associe une famille d'équations différentielles

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}u(t) \tag{5}$$

où la fonction u, *a priori* inconnue, appartient à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Cette fonction u est appelée *contrôle*.

On s'intéresse au *problème de commandabilité* associé à la paire (A, B). Plus précisément, étant donné un temps $\mathrm{T} > 0$, et un vecteur $x_\mathrm{T} \in \mathbb{R}^n$, on cherche à déterminer s'il existe un contrôle $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ tel que l'unique solution $\Phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ de (5) nulle en 0, vérifie $\Phi(\mathrm{T}) = x_\mathrm{T}$. Si un tel contrôle existe, on dit que l'état x_T est *atteignable* en temps T. On note $\mathscr{A}_\mathrm{T}$ l'ensemble des états atteignables en temps T.

1. Montrer que $\mathscr{A}_\mathrm{T}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit x_T et u un contrôle amenant l'état nul à $t = 0$ à l'état x_T au temps T. Montrer que l'on a
$$x_\mathrm{T} = \int_0^\mathrm{T} \mathrm{e}^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}} \mathrm{B}u(s)\,\mathrm{d}s$$
3. Soit $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n,mn}(\mathbb{R})$ la matrice par blocs définie par
$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{AB} & \mathrm{A}^2\mathrm{B} & \ldots \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est combinaison linéaire de la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2 \quad \mathrm{A}^{n-1})$.

(b) En déduire que $\mathscr{A}_\mathrm{T} \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{C})$.

4. (a) Soit $y \in \mathscr{A}_\mathrm{T}$. Montrer que

$$\int_0^\mathrm{T} {}^t y\, \mathrm{e}^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}\mathrm{B}\, {}^t\mathrm{B}\, \mathrm{e}^{(\mathrm{T}-s)\, {}^t\mathrm{A}} y \, \mathrm{d}s = 0$$

(b) en déduire que $y \in (\mathrm{Im}\,(\mathrm{C}))^\perp$, puis comparer $\mathscr{A}_\mathrm{T}$ et $\mathrm{Im}\,(\mathrm{C})$.

(c) L'ensemble $\mathscr{A}_\mathrm{T}$ dépend-il de T ?

5. On dit que la paire (A, B) est *commandable* en temps T si tout état est atteignable en temps T (i.e. $\mathscr{A}_\mathrm{T} = \mathbb{R}^n$).

(a) Montrer que la paire (A, B) est commandable si et seulement si le rang de C est n.

(b) En déduire qu'une paire commandable en temps T est aussi commandable en temps T', pour tout $\mathrm{T}' > 0$.

(c) Donner un exemple de paire non commandable.

6. On pose $\mathrm{D} = \displaystyle\int_0^\mathrm{T} \mathrm{e}^{(\mathrm{T}-s)\mathrm{A}}\mathrm{B}\, {}^t\mathrm{B}\, \mathrm{e}^{(\mathrm{T}-s)\, {}^t\mathrm{A}} \, \mathrm{d}s$

Montrer que D est une matrice carrée symétrique de taille n, et que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{D}) \subset \mathscr{A}_\mathrm{T}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ \mathrm{D} \subset \mathscr{A}_\mathrm{T}^\perp$, puis que $\mathscr{A}_\mathrm{T} = \mathrm{Im}\,(\mathrm{D})$.

7. Dans toute cette question, on suppose que la paire (A, B) est commandable.

(a) Justifier l'inversibilité de D.

(b) Soit $x_\mathrm{T} \in \mathbb{R}^n$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose

$$v(s) = {}^t\mathrm{B}\, \mathrm{e}^{(\mathrm{T}-s)\, {}^t\mathrm{A}} \mathrm{D}^{-1} x_\mathrm{T}$$

Montrer que le contrôle v envoie l'état nul à $t = 0$ sur l'état x_T au temps $t = \mathrm{T}$.

(c) Montrer que pour tout contrôle $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ transformant l'état nul à $t = 0$ en l'état x_T au temps T, on a

$$\int_0^\mathrm{T} \Big(v(s) | u(s) - v(s) \Big) \, \mathrm{d}s = 0$$

(d) En déduire que le contrôle v est celui qui minimise l'énergie : pour tout contrôle $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ ammenant 0 à x_T au temps T, on a

$$\int_0^\mathrm{T} \|u(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \geqslant \int_0^\mathrm{T} \|v(s)\|^2 \, \mathrm{d}s$$

avec égalité si et seulement si $u = v$ (on parle alors de *contrôle optimal*).

8. Application : on s'intéresse à l'équation

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 u(t) \tag{6}$$

où $\omega_0 \in\,]\, 0\,; +\infty\, [$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres donnés, et $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) résoudre (6) dans le cas $u = 0$ et $\lambda \in [\, 0\,; \omega_0\, [$.

(b) Trouver une paire (A, B) telle que (6) puisse s'écrire comme un système de commande de type

$$\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX} + \mathrm{B}u(t) \tag{7}$$

(c) la paire (A, B) est–elle commandable ?

II. Stabilisation par retour d'état

Dans cette partie, on s'intéresse aux contrôles dépendant linéairement de la solution X. Plus précisément, on suppose que $u = \mathrm{KX}$, où $\mathrm{K} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. De tels contrôles sont appelés retours d'état.

On cherche à déterminer s'il existe une matrice $\mathrm{K} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que toute solution de

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(\mathrm{KX})$$

soit asymptotiquement stable. Une paire (A, B) vérifiant cette propriété est dite ***stabilisable.***

1. Montrer que pour tout couple $(\lambda, \omega_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la paire associée à l'équation différentielle (7)définie dans la question 8 de la partie I est stabilisable.
2. Dans le cas $\lambda = 0$, peut–on trouver un réel k tel que toute solution de (7) avec $u(t) = kx(t)$ soit asymptotiquement stable ?
3. On dit que la paire (A, B) est conjuguée à la paire $(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}})$, s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\widetilde{\mathrm{B}} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}$. Montrer que la paire (A, B) est commandable, si et seulement si la paire $(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}})$ l'est.
4. Dans toute cette question, on suppose que $m = 1$ et que (A, B) est commandable. On identifie B au vecteur $b = (b_1, b_2, \dots b_n)$.
   (a) Vérifier que la famille de vecteurs $(b, \mathrm{A}b, \dots \mathrm{A}^{n-1}b)$ engendre $\mathbb{R}^n$, et qu'il existe $(a_0, \dots a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que
   $$\mathrm{A}^n = a_0 b + \dots a_{n-1}\mathrm{A}^{n-1}b$$
   (b) On pose $f_n = b$, et on définit $(f_{n-1}, \dots f_1)$ par la relation de récurrence $f_j = \mathrm{A}f_{j+1} - a_j f_n$, pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Montrer que $(f_1, \dots f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   (c) En déduire que la paire (A, B) est conjuguée à la paire $(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}})$ suivante
   $$\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   (d) Soit $\mathrm{F} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$. Montrer qu'il existe $\widetilde{\mathrm{K}} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que F soit le polynôme caractéristique de la matrice $\widetilde{\mathrm{A}} + \widetilde{\mathrm{B}}\widetilde{\mathrm{K}}$.
   (e) En déduire l'existence de $\mathrm{K} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que F soit le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{A} + \mathrm{BK}$.
5. Dans le cas $m = 1$, montrer que (A, B) commandable implique (A, B) stabilisable.